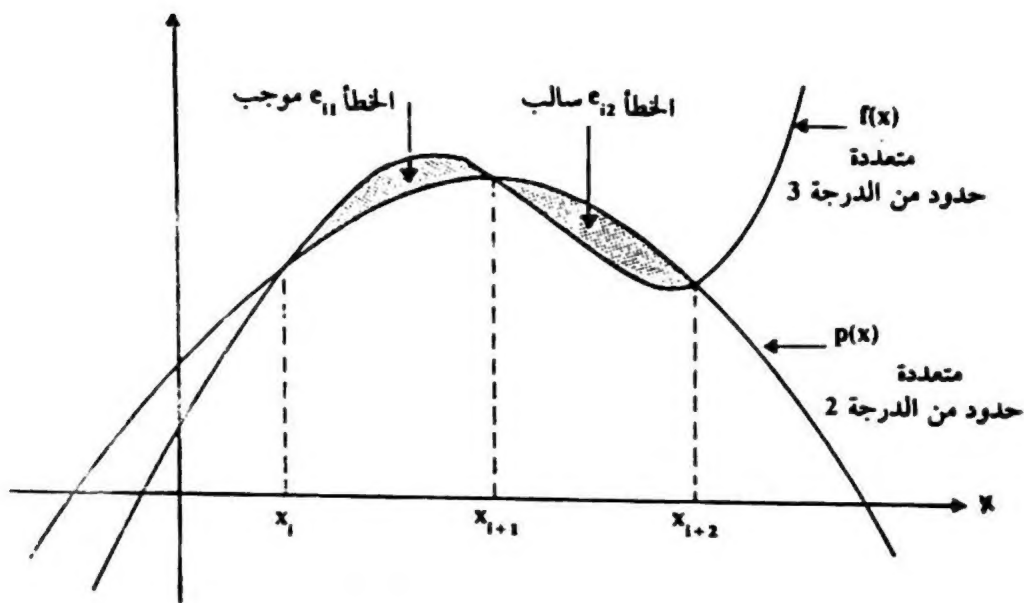


# الطرق العددية باستخدام

## FORTRAN فورتران



الدكتور عمر زرتي



منشورات ELGA

# المحتويات

## الجزء الأول

### الفصل الأول (حل المعادلات غير الخطية)

15	1.1 مقدمة
16	1.2 طريقة الرسم
18	1.3 طريقة التصنيف
27	1.4 طريقة الوضع الخاطئ
30	1.5 طريقة القاطع
34	1.6 طريقة نيوتن
42	1.7 طريقة النقطة الثابتة
45	1.8 تقدير الخطأ في طريقة النقطة الثابتة
47	1.9 تقدير الخطأ في طريقة نيوتن
52	نموذج اختبار -1-

### الفصل الثاني (حل معادلات ذات أكثر من مجهول)

55	2.1 مقدمة
57	2.2 طريقة جاكوبي

© كل الحقوق محفوظة

شركة ELGA

هاتف: (+356) 493635

فاكس: (+356) 493180

E-mail: elgapub@vol.net.mt

ص.ب 536

فاليستا - مالطا

## الفصل الخامس (التكامل العددي)

115	5.1 مقدمة
115	5.2 طريقة شبه المنحرف
118	5.3 طريقة سمبسن
122	5.4 تقدير الخطأ في طريقة شبه المنحرف
124	5.5 طريقة الاستكمال لريتشاردسن
125	5.6 تقدير الخطأ في طريقة سمبسن

## الفصل السادس (التفاضل العددي)

131	6.1 مقدمة
131	6.2 صيغ من المرتبة الأولى للمشتقة الأولى
133	6.3 صيغ من المرتبة الثانية للمشتقة الثانية
138	6.4 صيغ للمشتقة الثانية
141	نموذج امتحان شامل للجزء الأول

## الجزء الثاني

## الفصل السابع (الحل العددي للمعادلات التفاضلية)

145	7.1 مقدمة
147	7.2 طريقة أويلر
152	7.3 طريقة متسلسلة تايلور

62	2.3 طريقة جاوس-سيدل
64	2.4 شروط كافية لتقارب الطريقتين

## الفصل الثالث (حل المعادلات الخطية بالطرق المباشرة)

73	3.1 طريقة الحذف لجاوس
82	3.2 حساب المحددات
83	3.3 طريقة كرامر
84	3.4 حل عدة أنظمة من المعادلات
85	3.5 معكوس المصفوفة

## الفصل الرابع (الاستكمال)

91	4.1 مقدمة
91	4.2 الاستكمال الخطي
93	4.3 الاستكمال التربيعي
95	4.4 الاستكمال بمتعددة الحدود من الدرجة $n$
96	4.5 مؤثرات الفروق المحدودة
99	4.6 طريقة نيوتن للاستكمال بالفروق المتقدمة
103	4.7 طريقة لاجرانج
107	4.8 تقدير الخطأ في الاستكمال
112	4.9 نموذج اختبار -2-

## الفصل العاشر (طريقة المربعات الصغرى)

225	10.1 مقدمة
227	10.2 خط المربعات الصغرى
234	10.3 طريقة المربعات الصغرى لعلاقات غير خطية
241	10.4 متعددة الحدود من الدرجة $n$
245	10.5 طريقة المربعات الصغرى بدوال محددة
250	10.6 طريقة المربعات الصغرى في حل المسائل الحدية
255	10.7 تقريب الدوال باستعمال طريقة المربعات الصغرى
258	نموذج اختبار -2-

## الفصل الحادي عشر (حل المعادلات التفاضلية - الجزئية)

261	11.1 مقدمة
263	11.2 معادلة الانتشار
271	11.3 معادلة بواسون
280	11.4 معادلة الموجة
286	11.5 نموذج امتحان شامل للجزء الثاني

## ملحق (حلول الاختبارات)

155	7.4 الخطأ الكلي والتقارب في طريقة أولر
157	7.5 مسألة الاستقرار
159	7.6 الطرق الضمنية
161	7.7 طريقة أولر المعدلة
164	7.8 طريقة نقطة المنتصف
168	7.9 الصيغة العامة للطرق العددية
172	7.10 طريقة ملن
174	7.11 طريقة رانج-كوتا
180	7.12 حل المعادلات التفاضلية الآنية
182	7.13 حل المعادلات من المرتبة الثانية
188	نموذج اختبار -1-

## الفصل الثامن (مسائل القيم الحدية)

189	8.1 مقدمة
190	8.2 طريقة التصويب
199	8.3 طريقة الفروق المنتهية

## الفصل التاسع (مسائل القيم الذاتية)

209	9.1 مقدمة
212	9.2 القيم الذاتية للمعادلات التفاضلية
214	9.3 القيم الذاتية للمصفوفات
218	9.4 طريقة القوى

## مقدمة

يعتبر موضوع الطرق العددية من أهم المواضيع في الرياضيات التطبيقية، وذلك لكونها وسيلة فعالة في حل المسائل الرياضية التي تواجه المهندس والباحث العلمي.

وقد أضفى اختراع الحاسوب صبغة خاصة لهذا الفرع من فروع الرياضيات، وذلك لقيام هذه الآلة بالدور الحسابي الروتيني - الذي هو عادة جزء مهم في كل الطرق العددية - بسرعة هائلة ودقة فائقة، حتى أصبح اللجوء إلى استعمال الطرق العددية في حل المسائل التي يصعب حلها بالطرق الرياضية المعروفة أمراً عادياً في البحوث العلمية المتقدمة.

ونظراً لحدثة هذا الموضوع، وتطوره السريع المصاحب لتطور الآلات الحاسبة، فإن توفر المراجع العربية في مجال التحليل العددي يكاد يكون معدوماً، مما دفعني إلى تأليف هذا الكتاب على أمل أن يغطي جزءاً من هذا النقص.

هذا الكتاب هو خلاصة المادة التي قمت بتدريسها في مقررين يقسم الحاسب الآلي بكلية العلوم الأساسية (طرابلس) لسنوات عديدة. وبالتالي فإنه يشتمل على محتويات تكفي لتدريس موضوع (التحليل العددي) على فصلين دراسيين (أي سنة كاملة). وبالتحديد فإن الجزء الأول من الكتاب (أي الفصول من 1

إلى (6) هو مادة الفصل الأول لطلبة السنة الثالثة من مختلف التخصصات،  
والجزء الثاني يعطى في الفصل الثاني.

لاستيعاب المنهج المتبع في هذا الكتاب، يجب أن يكون الطالب قد درس  
مسبقاً المواضيع التالية: بالنسبة للجزء الأول (1) البرمجة بلغة فورتران، (2)  
الجبر الخطي، (3) التفاضل والتكامل. أما بالنسبة للجزء الثاني فيضاف إلى  
ذلك مادة المعادلات التفاضلية.

لقد راعيت في الكتابة أن يكون الأسلوب سهلاً ومباشراً مع محاولة تقريب  
مفاهيم متقدمة (مثل موضوع الاستقرار والتقارب) بطريقة قد تختلف عن  
الطرق المتبعة في العادة وذلك لغرض التبسيط.

وقد تعمّدت التركيز على برمجة أغلب الطرق العددية التي تتم مناقشتها،  
واللغة المستعملة لذلك هي فورتران. والذي دفعني إلى هذا التركيز سببان:  
الأول، توضيح الطريقة العددية بأسلوب محدد وهو لغة البرمجة؛ والثاني، تقوية  
الطالب وتدريبه أكثر في مجال البرمجة بدراسته لبرامج مختلفة ومتعددة. ولا شك  
في أن تعلم الطرق العددية دون إلمام بلغة من لغات البرمجة يعتبر غير ذي  
جدوى. أما اختيار لغة فورتران دون غيرها فذلك لأنها هي الأنسب في هذا  
المجال والأكثر استخداماً.

وأخيراً لا يفوتني أن أشكر كل من ساهم في هذا الكتاب سواء بالمراجعة، أو  
إبداء الملاحظات، أو بأي صورة أخرى... وأخص بالشكر كلاً من الدكتور  
علي بن الأشهر من قسم الرياضيات بكلية العلوم والدكتور مصطفى عبد  
العال من قسم الحاسب الآلي بنفس الكلية على ملاحظتهما القيمة حول  
الكتاب.

## الجزء الأول

## حل المعادلات Solution of Equations

### 1.1 مقدمة

يستعمل اصطلاح «حل المعادلة» للتعبير عن عملية إيجاد قيمة المجهول  $x$  التي تحقق المعادلة. فمثلاً المعادلة:

$$(1.1) \quad 2x + 3 = 0$$

يمكن حلها بإضافة  $-3$  للطرفين الأيمن والأيسر، ثم القسمة على  $2$  لنحصل على:

$$(1.2) \quad x = -3/2$$

وإذا عرفنا الدالة:

$$f(x) = 2x + 3$$

فإن  $x = -3/2$  تعتبر جذراً للدالة  $f(x)$ . وأحياناً يستعمل اصطلاح «إيجاد جذور المعادلة» للدلالة على حل المعادلة. لاحظ أن المعادلة (1.1) هي معادلة خطية، أي أن المجهول  $x$  يظهر في المعادلة بأس يساوي الواحد؛ فمثلاً المعادلة:

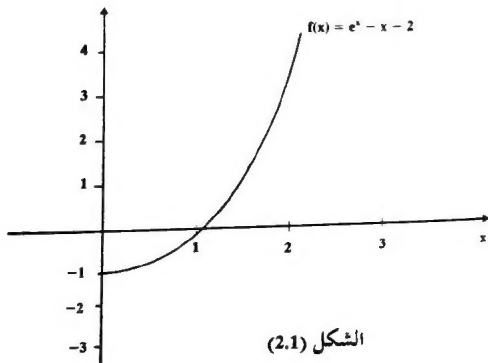
$$(1.3) \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

أولاً نوجد قيم  $f(x)$  لبعض قيم  $x$  حتى نتمكن من رسم هذه الدالة، على النحو التالي:

x	0	1	2	3	4
f(x)	-1	-0.28	3.4	15	49

لاحظ أن قيم  $f(x)$  قد تم حسابها في هذا الجدول مقربة لأقرب رقمين، حيث إن الرسم لا يحتاج لدقة أكثر من ذلك.

والآن نوصل منحنى بين النقاط المبينة على النحو التالي (شكل 2.1):



الشكل (2.1)

يتبين من هذا الرسم التقريبي أن الجذر هو  $x = 1.1$  تقريباً.

ملاحظة:

بالإمكان كتابة المعادلة:

$$e^x - x - 2 = 0$$

$$e^x - 2 = x$$

على النحو:

ليست معادلة خطية حيث إن أكبر أس للمتغير  $x$  هو 2، أي أنها معادلة من الدرجة الثانية. ويمكن حل هذه المعادلة باستعمال القانون المعروف:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

وبالتالي فإن لهذه المعادلة حلين، هما:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

والسؤال الآن هو ما إذا كان بالإمكان حل معادلات من الدرجة الثالثة فما فوق؟ والجواب هو أن ذلك ممكن في حالة الدرجة الثالثة والرابعة وإن كان الحل ليس سهلاً على الإطلاق. أما عدا ذلك فإن اللجوء إلى الحلول التقريبية أمر لا مفر منه.

أما المعادلات التي تحتوي على الدوال المثلثية والدوال الأسية، فإن حلها عادة ما يكون غير ممكن إلا بالطرق التقريبية. والأمثلة على ذلك المعادلات التالية:

$$(1.4) \quad x - \cos x = 0$$

$$(1.5) \quad e^x - x - 2 = 0$$

$$(1.6) \quad \log x + x - 10 = 0$$

ولهذا فإن دراسة الطرق العددية لإيجاد الحلول التقريبية لهذه المعادلات وغيرها تعتبر من المواضيع الهامة جداً.

## 1.2 طريقة الرسم Graphic Method

لإيجاد حل تقريبي للمعادلة  $f(x) = 0$ ، نستعمل طريقة الرسم البياني، وذلك برسم المنحنى  $f(x)$  وإيجاد نقطة تقاطع هذا المنحنى مع محور السينات.

مثال (2.1): أوجد حلاً تقريبياً للمعادلة:

$$f(x) = e^x - x - 2 = 0$$

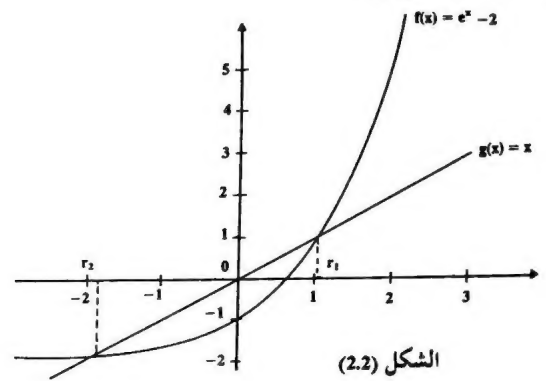
في الفترة  $[0, 4]$ .



وبالتالي فإن الجذور تقع عند نقط تقاطع الدالتين (المتحنيين):

$$g(x) = x, \quad f(x) = e^x - 2$$

وكما هو مبين في شكل (2.2).



الشكل (2.2)

من الرسم في الفترة  $[-2, 2]$  يتضح أن للمعادلة (1.5) حلين في هذه الفترة هما 1.1 و -1.8 تقريباً. للتحقق من ذلك، نلاحظ أن:

$$e^{1.1} - 1.1 - 2 \approx -0.096$$

$$e^{-1.8} - (-1.8) - 2 \approx -0.035$$

و:

نلاحظ أن الطرف الأيمن لا يساوي صفرًا كما يجب في حالة الحل الصحيح، ولكن القيم المتحصل عليها تعتبر قريبة من الصفر نسبياً، ويمكن الاستفادة من الجذور التقريبية كبداءة في عملية تكرارية للحصول على جذور أصح. من هذه الطرق طريقة التنصيف.

### 1.3 طريقة التنصيف Bisection Method

بالإمكان توضيح هذه الطريقة التي تعتمد على معاصرة الجذر في فترة تصغر في كل مرة بمقدار النصف بالتالي:

مثال (3.1):

أوجد حل المعادلة:

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

في الفترة  $[0.5, 1.5]$  بطريقة التنصيف.

أولاً يجب أن نتأكد أن  $f(0.5)$  و  $f(1.5)$  مختلفتان في الإشارة، وهذا صحيح حيث إن:

$$f(0.5) = 0.38, \quad f(1.5) \approx -1.43$$

إذن فهناك جذر للدالة  $f(x)$  في الفترة  $[0.5, 1.5]$  حيث إن هذه الدالة مستمرة continuous ولكي تتغير قيمتها من السالب إلى الموجب لا بد أن تمر بمحور السينات.

أول قيمة تقريبية للجذر نتحصل عليها بأخذ نقطة المنتصف للفترة  $[0.5, 1.5]$  وهي:

$$c_1 = \frac{0.5 + 1.5}{2} = 1$$

والآن نحتاج لمعرفة إشارة  $f(c_1)$  ولذلك نقوم بحساب قيمتها وهي:

$$f(c_1) = f(1) = -0.46$$

أي أنها سالبة، وهذا يعني أن الجذر المطلوب يقع في الفترة  $[0.5, 1]$  حيث إن  $f(x)$  تتغير إشارتها من الموجب عند 0.5 إلى السالب عند 1. إذن تكون القيمة التقريبية الثانية للجذر عند نقطة المنتصف للفترة  $[0.5, 1]$  وهي:

$$c_2 = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

وحيث إن:

$$f(c_2) = f(0.75) \approx -0.018$$

وهي سالبة، فإن الجذر يقع في الفترة  $[0.5, 0.75]$ ، وبالتالي فإن القيمة التقريبية الثالثة هي:

$$c_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

وحيث إن:

$$f(c_3) = 0.186$$

وهي قيمة موجبة، فإن الجذر يقع في الفترة  $[0.625, 0.75]$  وبالتالي:

$$c_4 = \frac{0.625 + 0.75}{2} = 0.6875$$

$$f(c_4) = 0.085$$

أي أن الجذر يقع في الفترة  $[0.6875, 0.75]$ ، وبالتالي فإن:

$$c_5 = (0.6875 + 0.75) / 2 = 0.71875$$

ونجد أن:

$$f(c_5) \approx 0.034$$

وكما هو واضح فإن هذه الطريقة تتطلب عدداً كبيراً من العمليات المتكررة «iterations»، ولكن استعمال الحاسوب في الحسابات يجعل ذلك مقبولاً، ويسهل هذه الصعوبة.

والسؤال الذي يطرح الآن: متى نتوقف؟ أي كم عملية تكرارية نحتاج لها للحصول على الحل المطلوب؟

والجواب هو أن عدد العمليات (أو الدورات) يزداد بازدياد الدقة المطلوبة [والمقصود بكلمة الدقة هو عدد الخانات الصحيحة في الجذر التقريبي ابتداءً من اليسار، فإذا كان الجذر الصحيح مثلاً هو 0.1234 والجذر التقريبي هو 0.12 فإن هذا التقريب دقيق لخانتين صحيحتين هما 12].

فإذا كان المطلوب أن يكون الجذر التقريبي مطابقاً تماماً للجذر الصحيح فإن

ذلك قد يتطلب عدداً لا نهائياً من الدورات، وبالتالي فلنأخذ عادة ما نكتفي بالشرط:

$$(3.1) \quad |f(c_n)| < \varepsilon$$

بدلاً من  $f(c_n) = 0$ ، حيث  $\varepsilon$  رقم صغير، كلما صغر زادت دقة  $c_n$  وزاد عدد الدورات  $n$ . وحيث إن هذا الاستبدال يعتبر تنازلاً وتسامحاً، فإن المتباينة (3.1) تسمى حالة التسامح Tolerance condition ويسمى الرقم  $\varepsilon$  برقم التسامح. والآن بالإمكان تلخيص طريقة التصنيف (أو بتعبير آخر خوارزمية التصنيف) في الخطوات التالية:

1 - المعطيات هي: الفترة  $[a_1, b_1]$  التي يقع داخلها الجذر بحيث:

$$f(a_1) f(b_1) < 0$$

رقم التسامح  $\varepsilon$  (وهو رقم صغير مثل  $10^{-6}$ )

2 - إبدأ بقيمة  $i = 1$ .

3 - أحسب نقطة المنتصف:

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

4 - إذا كان

$$|f(c_i)| < \varepsilon$$

فاطبع قيمة  $c_i$  وتوقف.

5 - إذا كان  $f(a_i) f(c_i) < 0$  فاجعل  $b_{i+1} = c_i$  (أي أن  $b_{i+1}$  تأخذ قيمة  $c_i$ ) وإلا فاجعل  $a_{i+1} = c_i$ . في الحالة الأولى  $a_{i+1} = a_i$  وفي الحالة الثانية  $b_{i+1} = b_i$ .

6 - ارجع إلى الخطوة (3) مع إضافة 1 إلى  $i$ .

ولتوضيح الخطوة (5)، نقوم برسم الحالتين في هذه الخطوة في شكل (3.2).

.... BISECTION METHOD.....

F(X) = EXP(-X)-X

EPS = 0.00001

A = 0

B = 1

FA = F(A)

C = (A+B)/2

FC = F(C)

IF (ABS(FC) - EPS) 20,10,10

TEST = FA \* FC

IF (TEST.GT.0) THEN

A = C

FA = FC

ELSE

B = C

ENDIF

GOTO 5

WRITE (\*,30) C,FC

FORMAT (' APPROXIMATE ROOT = ',E12.5, 10X,

\* ' F (ROOT) = ',E12.5)

STOP

END

ملاحظة :

لاحظ أن الدالة  $F(x)$  يتم استدعاؤها وإيجاد قيمتها مرة واحدة في كل دورة في البرنامج المذكور وذلك توفيراً لوقت الحاسب خاصة في حالة وجود دالة يتطلب حسابها وقتاً طويلاً.

تقدير الخطأ في طريقة التنصيف:

إذا كانت  $c$  هي القيمة التقريبية للقيمة الصحيحة  $t$  فإن الخطأ المطلق يعرف كالآتي:

$$e_a = t - c$$

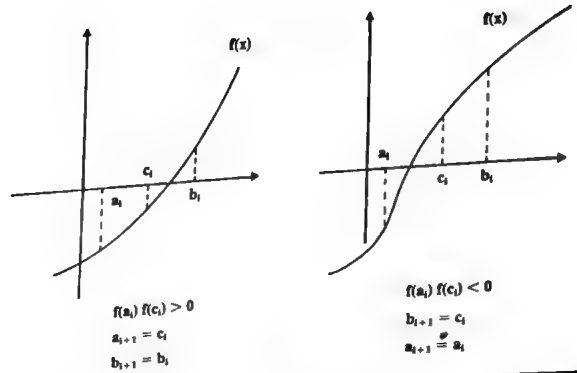
(3.2)

أما الخطأ النسبي فهو:

$$e_r = \frac{t - c}{t}, t \neq 0$$

(3.3)

لتقدير الخطأ في القيمة التقريبية للجذر نلاحظ أن الفترة التي تحتوي على الجذر  $(a_n, b_n)$  في الدورة  $n$  يكون طولها  $e_n$  نصف طول الفترة في الدورة



مثال (3.2):

برنامج بلغة فورتران لطريقة التنصيف

اكتب برنامجاً بلغة فورتران مستعملاً طريقة التنصيف لحل المعادلة:

$$e^{-x} = x$$

نلاحظ أن الدالة:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

تغير إشارتها بحيث:

$$f(0) > 0, f(1) < 0$$

أي أن:

$$f(0)f(1) < 0$$

وبالتالي يمكن اعتبار أن الجذر يقع في الفترة  $(0, 1)$  وأخذ هذه الفترة كثرة

ابتدائية:

التنصيف لها خاصية التقارب convergence. وهذه الخاصية مهمة جداً في التحليل العددي ولا تتوفر في كثير من الحالات.

مثال (3.2):

ما عدد الدورات التي قد تلزم في طريقة التنصيف للحصول على جذر تقريبي  $C_n$  بحيث يكون الخطأ المطلق في  $C_n$  لا يتجاوز 0.00001 علماً بأن طول الفترة الابتدائية هو 1.

$$\frac{\ell_1}{2^n} \leq 0.00001 \quad \text{نفترض أن:}$$

وبما أن  $\ell_1 = 1$  فإن

$$2^n \geq 100000$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين، نحصل على:

$$n \geq (5 / \log 2)$$

$$\geq 16.6$$

وبما أن  $n$  يجب أن تكون عدداً صحيحاً، فإن:

$$n = 17$$

تحقق المطلوب، أي أن 17 دورة في طريقة التنصيف تحقق خطأ مطلقاً لا يتجاوز 0.00001 في حالة أن طول الفترة الابتدائية هو 1.

السابقة. أي أن طول الفترة ينقص بمقدار النصف في كل دورة بحيث:

$$\ell_n = b_n - a_n = \frac{1}{2} \ell_{n-1}$$

وأيضاً:

$$\ell_{n-1} = \frac{1}{2} \ell_{n-2}$$

إذن:

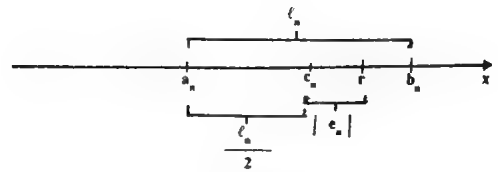
$$\ell_n = \frac{1}{2^2} \ell_{n-2}$$

وبصورة عامة:

$$(3.4) \quad \ell_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ell_1$$

حيث  $\ell_1$  طول الفترة الابتدائية.

وكما هو واضح من الشكل (1.3):



شكل (1.3)

فإن الخطأ المطلق  $e_n$  في الدورة  $n$  من طريقة التنصيف يحقق ما يلي:

$$(3.5) \quad |e_n| < \ell_n / 2$$

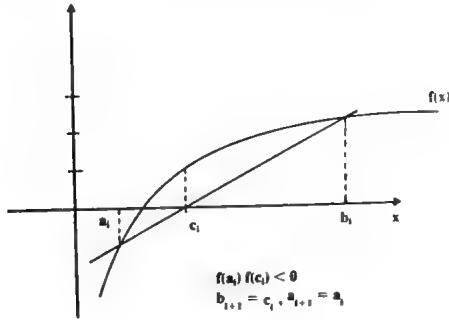
وبالتالي، من (3.4) يتبع أن:

$$(3.6) \quad |e_n| < \frac{\ell_1}{2^n}$$

ومن ذلك نستنتج أن الخطأ المطلق في طريقة التنصيف يؤول إلى الصفر عند تطبيق عدد الدورات إلى ما لا نهاية، وبعبارة أخرى نقول إن طريقة

#### 1.4 طريقة الوضع الخاطئ Method of False Position

هذه الطريقة شبيهة بطريقة التنصيف من حيث حصر الجذر بين قيمتين هما طرفا الفترة، ولكن بدل أخذ نقطة المنتصف للفترة  $[a_i, b_i]$  كجذر تقريبي عند الدورة  $i$ ، نوصل النقطتين  $(a_i, f(a_i))$  و  $(b_i, f(b_i))$  بخط مستقيم ليتقاطع مع محور السينات في النقطة  $c_i$  كما في الرسم (شكل 4.1).



شكل (4.1)

وكما هو الحال في طريقة التنصيف، نختبر إشارة  $f(a_i)f(c_i)$ . إذا كانت سالبة (كما في شكل 4.1) فإن  $b_{i+1}$  تأخذ قيمة  $c_i$  وتبقى  $a_{i+1}$  تساوي  $a_i$ ، أما إذا كانت الإشارة موجبة فإن  $a_{i+1}$  تأخذ قيمة  $c_i$  وتبقى  $b_{i+1}$  تساوي  $b_i$ .

لإيجاد قيمة  $c_i$ ، نوجد معادلة الخط المستقيم، وهي:

$$\frac{y - f(a_i)}{x - a_i} = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}$$

وبوضع  $y = 0$  و  $x = c_i$  نحصل على:

$$c_i = a_i - \frac{(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)} f(a_i) \quad (4.1)$$

#### تمارين (1)

1 - باستعمال طريقة رسم المنحنيات، أوجد فترة مناسبة تحوي كل جذر من جذور المعادلات التالية:

- (a)  $x^2 - x - 7 = 0$
- (b)  $\exp(-x) + x - 3 = 0$
- (c)  $\ln(x) - x + 7 = 0$
- (d)  $x^3 - x - 10 = 0$

2 - أوجد الجذور التقريبية للمعادلات في تمرين (1) وذلك برسم منحنى الدالتين  $f(x)$  و  $g(x)$  حيث  $g(x) = x$  و  $f(x) = g(x)$  عند كل جذر.

3 - استعمل طريقة التنصيف لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلات في تمرين (1). استعمل 5 دورات فقط.

4 - إذا كان  $f(a)f(b)$  قيمة سالبة، فهل هذا يعني وجود جذر في الفترة  $[a, b]$ ؟ استعمل الدالة  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  في الفترة  $[0, 2]$  لتحقيق إجابتك مبيئاً ذلك بالرسم.

5 - أوجد القيمة التقريبية للجذر الموجب للدالة:  $f(x) = x - 3 \ln(x+1)$

باستعمال طريقة التنصيف، أوقف الدورات عندما  $|f(x)| < 0.01$ .

6 - اكتب برنامجاً بلغة فورتران مستعملاً طريقة التنصيف لإيجاد قيمة تقريبية لجذر الدالة  $F(x)$  الواقع في الفترة  $[A, B]$  بحيث لا يتجاوز الخطأ المطلق عن 0.000001. [ملاحظة: أكتب البرنامج على صورة SUBROUTINE بحيث يتم إدخال A و B و  $F(x)$  في البرنامج الرئيسي].

7 - أوجد عدد الدورات التي قد تلزم لإيجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة  $f(x) = 0$  بحيث لا يتجاوز الخطأ المطلق في هذه القيمة عن 0.000001 إذا كان طول الفترة الابتدائية هو 2.

يتم حسابها خارج الدورة، ولكن نحسب:

$$FC = F(C)$$

داخل الدورة ، المطلوب من القارئ كتابة برنامج لهذه الطريقة. ( انظر تمرينات 2).

ملاحظة:

طريقة الوضع الخاطئ تتمتع بخاصية التقارب كما هو الحال في طريقة التنصيف:

مثال (4.1):

أوجد جذراً تقريبياً للمعادلة  $f(x) = x - \tan(x)$  باستعمال طريقة الوضع الخاطئ علماً بأن الجذر يقع في الفترة (4,4.5). أوقف الدورات عندما  $|f(x)| < 0.005$ .

$$f(a_1) = f(4) = 2.8421 \text{ أولاً نلاحظ أن:}$$

$$f(b_1) = f(4.5) = -0.1373$$

وبالتالي فإن الفترة (4,4.5) تحتوي على جذر واحد على الأقل. نحسب الآن  $c_1$  من (4.1) بحيث:

$$c_1 = 4 - (2.8421) \frac{4.5 - 4}{-0.1373 - 2.8421} = 4.477$$

$$f(c_1) = 0.3075$$

وبما أن:

قيمة موجبة، فإن الجذر يقع في الفترة (4.477,4.5) وبالتالي فإن:

$$c_2 = 4.477 - (0.3075) \frac{4.5 - 4.477}{-0.1373 - 0.3075} = 4.4929$$

أو بصورة أخرى:

$$c_i = b_i - \frac{(b_i - a_i) f(b_i)}{f(b_i) - f(a_i)} \quad (4.2)$$

والآن نلخص طريقة الوضع الخاطئ في الخوارزمية التالية:

1 - المعطيات هي:  $a_1, b_1$  بحيث  $f(a_1) f(b_1) < 0$ .

- الدالة  $f(x)$  ورقم التسامح  $\epsilon$ .

2 - أبدأ بالقيمة  $i = 1$ .

3 - أحسب  $c_i$  من (4.1) أو (4.2).

4 - إذا كانت قيمة  $|f(c_i)|$  أقل من  $\epsilon$ ، فاطبع  $c_i$  وتوقف. وإلا فاختر إشارة  $f(a_i) f(c_i)$  بحيث:

إذا كانت القيمة سالبة فدع  $b_{i+1} = c_i$ ، وإذا كانت موجبة فدع  $a_{i+1} = c_i$ . في الحالة الأولى  $a_{i+1} = a_i$  وفي الحالة الثانية  $b_{i+1} = b_i$ .

5 - أرجع إلى الخطوة (3) مع إضافة 1 إلى  $i$ .

البرنامج بلغة الفورتران لهذه الطريقة مطابق للبرنامج الذي تمت كتابته لطريقة التنصيف عدا الخطوة التي يتم فيها حساب  $c_i$ . لاحظ أنه بالإمكان كتابة البرنامج بحيث يتم حساب الدالة مرة واحدة فقط في كل دورة. ولهذا فإن (4.2) لا تكتب في البرنامج على النحو:

$$C = B - (B - A) * F(B) / (F(B) - F(A))$$

لأن هذه الطريقة تكلف حساب الدالة 3 مرات في هذه الجملة، ولكن يجب كتابتها على النحو:

$$C = B - (B - A) * FB / (FB - FA)$$

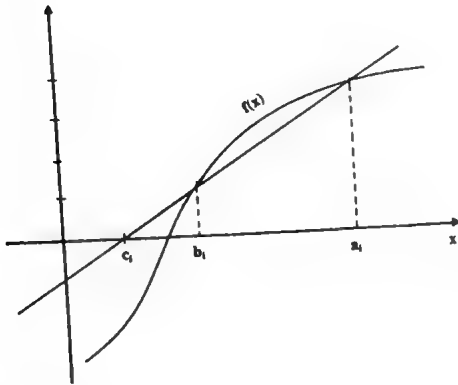
حيث:

$$FA = F(A), FB = F(B)$$

### ملاحظة:

حددنا في طريقة القاطع الحد الأعلى لعدد الدورات ولم نفعل ذلك في طريقة التصنيف وطريقة الوضع الخاطئ وذلك لسبب مهم جداً وهو أن التقارب في طريقة القاطع ليس دائماً أكيداً، وبالتالي قد يحدث أن ندخل في حلقة لا نهائية من الدورات دون أن نتوصل إلى الحل بطريقة القاطع. وقد نتساءل إذن لماذا نستعمل هذه الطريقة أحياناً ما دام الوصول إلى الحل عن طريقها غير مضمون؟ والجواب هو أن اشتراط وقوع الجذر داخل الفترة الابتدائية واختلاف إشارة الدالة على حدي هذه الفترة قد يصعب أحياناً توفره. . ولذلك نستعمل طريقة القاطع في هذه الحالة بدل طريقة الوضع الخاطئ.

والرسم في الشكل (5.1) يوضح كيفية عمل طريقة القاطع.



شكل (5.1)

مثال (5.1):

أحسب حلاً تقريبياً للمعادلة  $f(x) = e^x - 5 = 0$  باستعمال طريقة القاطع. افترض أن  $a_1 = 0$  و  $b_1 = 1$  واحسب ثلاث دورات فقط.

وبما أن:

$$f(c_2) = 0.126 > 0$$

فإن الجذر يقع في الفترة (4.4929, 4.5). ونستمر على هذا النحو في حساب  $c_3, c_4, c_5$  حيث نجد أن:

$$c_3 = 4.4935$$

$$|f(c_5)| = 0.00183 < 0.005$$

وبالتالي نتوقف عن الدورات الحسابية كما هو مطلوب.

### 1.5 طريقة القاطع Secant Method

هذه الطريقة تتفق مع طريقة الوضع الخاطئ من حيث استعمال المعادلة (4.1) أو (4.2)، ولكن لا نشترط هنا أن تكون الفترة الابتدائية  $(a_1, b_1)$  محتوية على الجذر. ويمكن تلخيص هذه الطريقة في الخوارزمية التالية:

1 - المعطيات: الدالة  $f(x)$

- أي نقطتين  $a_1, b_1$

- رقم التسامح  $\epsilon$

- الحد الأعلى لعدد الدورات  $m$

2 - قم بالخطوات (3) إلى (6) بحيث لا يتجاوز عدد الدورات  $m$  (أي أن  $i$  تبدأ من 1 إلى  $m$ )

3 - أحسب 
$$c_i = a_i - f(a_i) \frac{(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

4 - أحسب  $f(c_i)$  وقارن  $|f(c_i)|$  بالعدد  $\epsilon$ . وإذا كان  $|f(c_i)| < \epsilon$

إطبع قيمة  $c$  و  $f(c)$  ثم توقف، وإلا فاستمر إلى الخطوة (5).

5 - دع  $a_{i+1}$  تأخذ قيمة  $b_i$  ودع  $b_{i+1}$  تأخذ قيمة  $c_i$ ، أي (بالرموز) دع:

$$a_{i+1} = b_i \quad b_{i+1} = c_i$$

6 - ارجع إلى الخطوة (3).

### الدورة الأولى:

C.....SECANT METHOD.....

```

F(X)=EXP(X)-5
A=0
B=1
MAX=50
FA=F(A)
FB=F(B)
EPS=0.0001
DO 100 I=1,MAX
C=A-FA*(B-A)/(FB-FA)
FC=F(C)
IF (ABS(FC).LT.EPS)GO TO 200
A=B
B=C
FA=FB
FB=FC
100 CONTINUE
200 WRITE(*,210)C,FC,I
210 FORMAT(10X,'ROOT=',E15.6,10X,'F(ROOT)
      =',E15.6,10X,'ITERATIONS=',I3)
STOP
END

```

عند إجراء هذا البرنامج، نتحصل على الناتج الآتي:

ROOT = 0.160944E + 01 F(ROOT) = - 0.461802E - 05 I TERTATIONS = 6

### تمارين (2)

- 1 - أوجد قياً تقريبية لجذور المعادلات في مجموعة تمارين «1» تمرين -1، مستعملاً طريقة الوضع الخاطئ بخمس دورات.
- 2 - حل تمرين -5- من مجموعة تمارين «1» بطريقة الوضع الخاطئ.
- 3 - اكتب برنامجاً بلغة الفورتران لإيجاد قيمة تقريبية لجذر الدالة  $F(x)$  الواقع في الفترة  $[A, B]$  باستعمال طريقة الوضع الخاطئ مع إيقاف الدوران عندما  $|F(x)| < \epsilon$ . اكتب البرنامج على صورة SUBROUTINE بحيث يتم تعريف  $F(x)$ ,  $B$ ,  $A$  في البرنامج الرئيسي.
- 4 - أحسب الجذر التربيعي للمعدد 5 باستعمال طريقة الوضع الخاطئ بحيث يكون التقريب  $c$  محققاً  $|c^2 - 5| < 0.01$ .

$$a_1 = 0, f(a_1) = -4$$

$$b_1 = 1, f(b_1) = -2.2817$$

$$c_1 = a_1 - f(a_1) \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} = 2.3278$$

$$f(c_1) = 5.2554$$

### الدورة الثانية:

$$a_2 = b_1 = 1, f(a_2) = f(b_1) = -2.2817$$

$$b_2 = c_1 = 2.3278, f(b_2) = f(c_1) = 5.2554$$

$$c_2 = a_2 - f(a_2) \frac{(b_2 - a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = 1.4020$$

$$f(c_2) = -0.93684$$

### الدورة الثالثة:

$$a_3 = b_2 = 2.3278, f(a_3) = f(b_2) = 5.2554$$

$$b_3 = c_2 = 1.4020, f(b_3) = f(c_2) = -0.93684$$

$$c_3 = a_3 - \frac{f(a_3)(b_3 - a_3)}{f(b_3) - f(a_3)} = 1.5421$$

$$f(c_3) = -0.32560$$

برنامج لحل المعادلة  $f(x) = 0$  بطريقة القاطع لإيجاد حل تقريبي للمعادلة  $e^x - 5 = 0$  بطريقة القاطع، نكتب البرنامج التالي بلغة الفورتران.



هو ميل المستقيم الواصل بين النقطتين  $(a_i, f(a_i))$  و  $(b_i, f(b_i))$ . كما نلاحظ أنه إذا كانت النقطتان قريبتين ومتلاصقتين فإن:

$$f'(b_i) \approx s_i$$

حيث  $f'(b_i)$  هي قيمة المشتقة الأولى عند  $b_i$  وتمثل ميل المماس عند هذه النقطة. وإذا استعملنا:

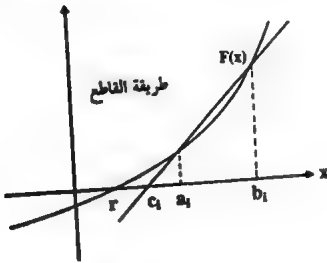
$$x_{i+1} = c_i$$

$$x_i = a_i \approx b_i$$

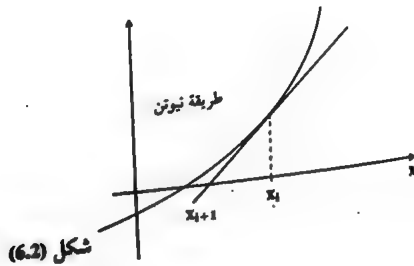
فإن (6.1) تؤول إلى:

$$(6.2) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

وهي القاعدة المعروفة باسم طريقة نيوتن. ويمكن توضيح هذه الطريقة بالرسم على النحو المبين في الشكل (6.2) حيث نوجد  $x_{i+1}$  من تقاطع المماس مع محور السينات.



شكل (6.1)



شكل (6.2)

- 5 - استعمل طريقة القاطع لإيجاد جذر تقريبي للمعادلة  $xe^x = 2$  مستعملاً التقريبين 0.7 و 0.8 في البداية وحساب 4 دورات فقط.
- 6 - لحساب  $\sqrt{5}$  بطريقة القاطع، بين أن هذه الطريقة مكافئة للمتابعة الآتية:

$$c_i = (a_i b_i + 5) / (a_i + b_i)$$

$$a_{i+1} = b_i, \quad b_{i+1} = c_i$$

وب) أحسب  $c_1, c_2, c_3, c_4$  إذا كانت  $a_1 = 3, b_1 = 4$ .

وح) أكتب برنامجاً لحساب  $c_i$  من  $i = 1$  إلى  $i = 20$ .

- 7 - أكتب برنامجاً فرعياً Subroutine لحل المعادلة  $f(x) = 0$  بالطريقة التالية:

اختر إشارة  $f(a_i) f(b_i)$  حيث  $i = 1, 2, \dots$  فإذا كانت موجبة استعمل طريقة القاطع، وإلا فاستعمل طريقة الوضع الخاطئ من تلك الدورة فيما بعد. ما هي مزايا هذه الطريقة؟

- 8 - أوجد حلاً تقريبياً للمعادلة  $f(x) = xe^{-x} - 1 = 0$  بطريقة القاطع مبدئاً بالقيمتين  $a_1 = 0, b_1 = 1$ . احسب 3 دورات فقط. هل ستؤدي هذه الطريقة إلى الحل؟ وضح إجابتك بالرسم.

#### 1.6 طريقة نيوتن (Newton's Method)

نلاحظ أن طريقة القاطع تعتمد على القاعدة:

$$(6.1) \quad c_i = b_i - \frac{f(b_i)}{s_i}$$

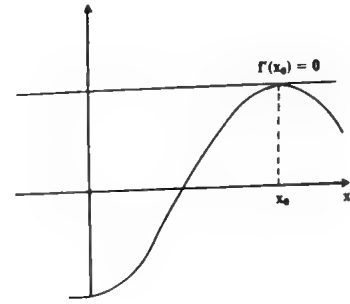
حيث:

$$s_i = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}$$

إلا أن هذه الطريقة قد لا تؤدي إلى الحل المطلوب، وهذا يحدث بالذات إذا كانت:

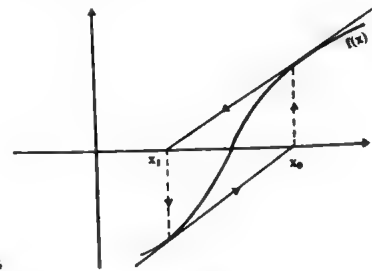
$$f'(x_0) \approx 0$$

كما هو مبين بالرسم حيث يصبح المماس أفقياً ولا يتقاطع مع محور السينات (شكل 6.3).



شكل (6.3)

لذلك يجب أن تختبر قيمة  $f'(x)$  بحيث إذا كانت قريبة من الصفر نتوقف عن الحل، كما يجب أن يوضع حد أعلى لعدد الدورات في برنامج هذه الطريقة، احتياطاً للدخول في دورات لا نهائية مثل الوضع في الشكل (6.4).



شكل (6.4)

ومن المناسب أحياناً أن نستعمل الشرط:

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta$$

لإيقاف الدورات بدلاً من (أو مع) الشرط:

$$|f(x_i)| < \epsilon$$

$$|x_{i+1} - x_i| = \left| \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right|$$

وذلك لأن:

فإذا كانت  $x_i, x_{i+1}$  متقاربتين فيالضرورة أن تكون  $f(x_i)$  ذات قيمة صغيرة إذا كانت  $f'(x_i)$  غير قريبة من الصفر.

والآن يمكن أن نلخص طريقة نيوتن في الخوارزمية التالية:

- 1 - حدد المعطيات:  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $x_0$  (قيمة تقريبية للجذر)،  $\epsilon$  و  $\delta$  (عدداً صغيران)،  $\max$  (الحد الأعلى لعدد الدورات).
- 2 - نفذ الخطوات (3) إلى (7) من  $i = 0$  إلى  $i = \max$ .
- 3 - إذا كانت  $|f(x_i)| < \epsilon$  فاطبع  $x_i, f(x_i)$  وتوقف.
- 4 - إذا كانت  $|f'(x_0)| < \epsilon$  فاطبع ما يفيد ذلك وتوقف.
- 5 - أحسب  $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$
- 6 - إذا كانت:  $|x_{i+1} - x_i| < \delta$  فاطبع  $x_i, f(x_i)$  وتوقف.

7 - ارجع إلى الخطوة (3).

مثال (6.1):

$$x^3 + 2e^x = 120$$

حل المعادلة

بطريقة نيوتن. أوقف الدورات عندما  $|f(x_i)| < 10^{-4}$

استعمل القيمة الابتدائية  $x_0 = 3.5$

```

c .... NEWTON'S METHOD.....
F(X) = 2 * COS (X) - X*X
c.. ... FD(X) IS DERIVATIVE of F(x)
FD(X) = - 2 * SIN (X) - 2*X
A = 1
MAX = 20
EPS = 0.000001
DEL = .00001
DO 50 I = 1, MAX
    FA = F(A)
    FDA = FD(A)
    IF (ABS (FA) .LT. EPS) GO TO 60
    IF (ABS (FDA) .LE. EPS) GO TO 100
    B = A - FA / FDA
    IF (ABS (B - A) .LT. DEL) GO TO 60
    A = B
50 CONTINUE
60 WRITE (*, 80) A, FA, I
80 FORMAT (IX, 'ROOT = ', E 15.6,
    * 'F (ROOT) = ', E 15.6, 5X, 'ITER = ', I3)
STOP
100 WRITE (*, 120)
120 FORMAT (5X, 'DERIVATIVE IS ZERO')
STOP
END

```

تطبيقات على طريقة نيوتن

مثال (6.2):  
(إيجاد الجذر التربيعي)  
أوجد الجذر التربيعي  $\sqrt{a}$  للعدد  $a > 0$  بطريقة نيوتن مع التطبيق لإيجاد  $\sqrt{2}$ .

نوجد الحل للمعادلة  $f(x) = x^2 - a = 0$ ، وبذلك يمكن تبسيط قاعدة نيوتن لهذه الدالة كما يلي:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - a}{2x_i}$$

39

$$f(x) = x^3 + 2e^x - 120$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2e^x$$

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0) \\ = 3.5 - (-10.89) / 102.98 \\ = 3.605749$$

$$f(x_1) = 0.492847 \\ x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1) \\ = 3.601324$$

$$f(x_2) = 0.000909 \\ x_3 = x_2 - f(x_2) / f'(x_2) \\ = 3.601316$$

$$f(x_3) = -0.000013$$

دع:

إذن:

إذن:

إذن:

$$|f(x_3)| < 10^{-4}$$

وبالتالي نتوقف عند  $x_3$  كما هو مطلوب، وتعتبر هي الحل التقريبي.

برنامج لطريقة نيوتن

والآن نكتب برنامجاً بلغة فورتران لحل المعادلة:

$$f(x) = 2\cos x - x^2 = 0$$

بطريقة نيوتن، مع أخذ  $x_0 = 1$  وإيقاف الدورات إذا تحقق أحد الشرطين:

$$|f(x_i)| < 10^{-6} \quad \text{أو} \quad |x_{i+1} - x_i| < 10^{-5}$$

أو عندما يصل عدد الدورات إلى 20 دورة.

38

أي أن:

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + a}{2x_i}$$

وبذلك، فإذا عرفنا الدالة:

$$g(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$$

فإن قاعدة نيوتن تصبح على النحو:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

فمثلاً إذا كانت  $a = 2$  وأخذنا القيمة الابتدائية:  $x_0 = 1$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1 + 2}{2} = 1.5 \quad \text{فإن:}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{(1.5)^2 + 2}{2(1.5)} = 1.4166667$$

$$x_3 = g(x_2) = 1.4142157$$

$$x_4 = g(x_3) = 1.4142136$$

$$|x_4 - x_3| = .0000021$$

وبما أن الفرق

يعتبر صغيراً نسبياً، فيمكن الاكتفاء بأربع دورات وأخذ  $x_4$  كقيمة تقريبية للجذر  $\sqrt{2}$ . وإذا أردنا دقة أفضل، نحسب دورات أكثر.

مثال (6.3):

(إيجاد المعكوس الضربي)

أوجد القيمة التقريبية للمعكوس الضربي  $\frac{1}{n}$

لأي عدد  $a$  لا يساوي صفراً، وذلك بحل المعادلة:

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

وطبق الطريقة لحساب  $1/7$ ، ابتداء من  $x_0 = 0.2$

نلاحظ أن:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a - \frac{1}{x_i}}{\frac{1}{x_i^2}}$$

$$= x_i - ax_i^2 + x_i$$

$$x_{i+1} = x_i (2 - ax_i)$$

(6.4)

ومرة أخرى، يمكن وضع طريقة نيوتن على النحو:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

$$g(x) = x(2 - ax) \quad \text{ولكن الآن:}$$

وعلى سبيل المثال، نضع  $a = 7$  (أي أن المطلوب حساب  $\frac{1}{7}$ )

ولتكن القيمة الابتدائية هي:

$$x_0 = 0.2$$

إذن:

$$x_1 = g(x_0) = 0.2 (2 - 2(0.2)) = 0.12$$

وهكذا، فإن:

$$x_2 = g(x_1) = 0.1392$$

$$x_3 = g(x_2) = 0.1427635$$

$$x_4 = g(x_3) = 0.1428508$$

$$x_5 = g(x_4) = 0.14285714$$

ومن الواضح أن  $x_5$  لا تختلف كثيراً عن  $x_4$ ، ويمكن اعتبارها للمعكوس للعدد

7.

ملاحظة:

$$1- g(x) = \frac{x^2 + 10}{7} = x$$

$$2- g(x) = \sqrt{7x - 10} = x$$

$$3- g(x) = x^2 - 6x + 10 = x$$

والآن نستعمل طريقة نيوتن، وذلك بوضع:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 10}{2x - 7} \quad \text{لنحصل على:}$$

مثال (7.2):

استعمل طريقة النقطة الثابتة لإيجاد حل تقريبي للمعادلة

$$x = \cos x$$

مبتدئاً بالقيمة  $x_0 = 1$  مع التوقف عندما  $|x_1 - x_{1-1}| < 0.002$

من الواضح هنا أن أبسط شكل للدالة  $g(x)$  هو:

$$g(x) = \cos(x)$$

وبالتالي فإن:

$$x_1 = g(x_0) = \cos(1) = 0.540302$$

$$x_2 = g(x_1) = 0.857553$$

$$x_3 = g(x_2) = 0.654290$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{14} = 0.738369$$

$$x_{15} = 0.739560$$

وبما أن:

$$|x_{15} - x_{14}| = .001191 < .002$$

يتبين من القاعدة (6.4) أنه من الناحية النظرية يمكن أن تغني عملية الضرب عن عملية القسمة، ذلك لأن القاعدة (6.4) تفيد بأن عملية القسمة ما هي إلا سلسلة من عمليات الضرب تؤول في النهاية إلى ناتج القسمة، فلإيجاد

$$c = a/b = ab^{-1}$$

نوجد المعكوس  $b^{-1}$  بواسطة (6.4) ثم نضرب الناتج في  $a$ .

### 1.7 طريقة النقطة الثابتة (Fixed-Point Method)

تعتمد هذه الطريقة على تحويل المعادلة  $f(x) = 0$  إلى شكل مكافئ لها على النحو:

$$x = g(x)$$

ثم استعمال القاعدة التكرارية:

$$(7.1) \quad x_{i+1} = g(x_i)$$

وكمثال على ذلك، القاعدة (6.4) و (6.5) في طريقة نيوتن، والنقطة  $r$  التي

تحقق:

$$r = g(r)$$

تسمى نقطة ثابتة للدالة  $g(x)$ ، ومن هنا جاءت تسمية هذه الطريقة.

مثال (7.1):

اكتب المعادلة:

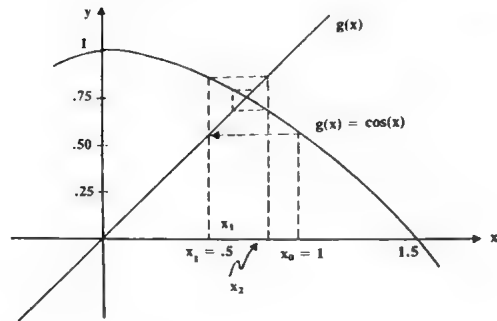
$$f(x) = x^2 - 7x + 10 = 0$$

على النحو  $x = g(x)$ .

بالإمكان وضع هذه المعادلة على النحو المطلوب بعدة طرق، نختار منها ما يلي:

فتتوقف عن الدورات كما هو مطلوب.

وبالإمكان توضيح هذا المثال بالرسم التالي (شكل 7.1).



شكل (7.1)

ويمكن الآن تلخيص طريقة النقطة الثابتة في الخطوات التالية:

- 1 - حدد المعطيات:  $\epsilon, \max, x_0, g(x)$ .
- 2 - نفذ الخطوات (3) إلى (6) من  $i = 1$  إلى  $i = \max$ .
- 3 - أحسب  $x_{i+1} = g(x_i)$ .
- 4 - إذا كان  $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$  توقف.
- 5 - إرجع إلى الخطوة (3).

وهذه الخطوات تكتب في برنامج فرعي بلغة فورتران كما يلي:

```
SUBROUTINE FPM (G, XO, MAX, EPS, X1, I)
DO 100 I = 1, MAX
X1 = G (XO)
IF (ABS (X1 - XO) .LT. EPS) RETURN
XO = X1
CONTINUE
RETURN
END
```

100

44

### 1.8 تقدير الخطأ في طريقة النقطة الثابتة

إذا اعتبرنا أن  $x_{i+1}$  هي القيمة التقريبية للقيمة  $r$  حيث:

$$x_{i+1} = g(x_i), r = g(r)$$

فإن الخطأ المطلق في هذا التقريب هو:

$$(8.1) \quad e_{i+1} = r - x_{i+1} \\ = g(r) - g(x_i)$$

وإذا كانت الدالة  $g(x)$  قابلة للتفاضل عدد  $n$  من المشتقات، فباستعمال متسلسلة تايلور Taylor's series نحصل على:

$$(8.2) \quad g(x_i) = g(r) + (x_i - r) g'(r) + \frac{1}{2} (x_i - r)^2 g''(r) \\ + \dots + \frac{1}{n!} (x_i - r)^n g^{(n)}(r)$$

حيث  $\xi_i$  نقطة تقع في داخل الفترة  $[x_i, r]$ . من (8.1) و (8.2) نحصل على:

$$(8.3) \quad e_{i+1} = e_i g'(r) - \frac{1}{2} e_i^2 g''(r) + \dots \pm \frac{1}{n!} e_i^n g^{(n)}(\xi_i)$$

وبالخصوص، إذا كانت  $n = 1$  فإن:

$$(8.4) \quad e_{i+1} = e_i g'(\xi_i)$$

وبالمثل فإن:

$$(8.5) \quad e_i = e_{i-1} g'(\xi_{i-1})$$

حيث  $\xi_{i-1}$  تقع بين  $x_{i-1}$  و  $r$ .

$$e_{i+1} = g'(\xi_i) g'(\xi_{i-1}) e_{i-1}$$

أي أن:

$$e_{i+1} = g'(\xi_i) g'(\xi_{i-1}) \dots g'(\xi_0) e_0$$

فإذا وجدت قيمة موجبة  $k$  بحيث:

$$|g'(x)| \leq k$$

في فترة  $I$  تحتوي على  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i$  فإن:

$$(8.6) \quad |e_{i+1}| \leq k^{i+1} |e_0|$$

لاحظ أن هذه المتباينة تحدد أعلى قيمة للخطأ المطلق في الدورة  $i+1$  وهي مشروطة بوقوع  $\xi_i$  في الفترة  $I$  حيث  $i = 0, 1, 2, \dots$

فإذا افترضنا أن  $x_0$  و  $x_1$  تقع في  $I$  وأن  $k$  أقل من الواحد فإن  $x_2, x_3, \dots$  كلها تقع في الفترة  $I$  لأن (باستعمال متسلسلة تايلور):

$$\begin{aligned} x_2 &= g(x_1) \\ &= g(x_0) + (x_1 - x_0) g'(z_0) \\ &= x_1 + (x_1 - x_0) g'(z_0) \end{aligned}$$

حيث  $z_0$  تقع بين  $x_0$  و  $x_1$ . إذن:

$$|x_2 - x_1| \leq |x_1 - x_0| |g'(z_0)| < |x_1 - x_0|$$

وهذا يعني أن  $x_2$  تنتمي إلى  $I$  وبالتالي فإن  $x_3, x_4, \dots$  تنتمي إلى  $I$  بالطريقة نفسها. وحيث إن  $r$  تنتمي إلى  $I$  و  $\xi_i$  تقع بين  $x_i$  و  $r$  فإن  $\xi_i$  تنتمي إلى  $I$ .

ونستخلص من (8.6) وافترض أن  $k$  أقل من الواحد أن الخطأ المطلق يؤول إلى الصفر عندما يؤول عدد الدورات  $i$  إلى ما لا نهاية. وهي خاصية التقارب المهمة.

مبرهنة (7.1)

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \text{إذا كانت:}$$

لجميع قيم  $x$  في فترة  $I$  تحتوي على  $x_0, x_1, r$  فإن طريقة النقطة الثابتة:

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

تقارب من الحل  $r$  للمعادلة:  $x = g(x)$

مثال (8.1):

بين أن المعادلة  $x = \cos(x)$  يمكن حلها بطريقة النقطة الثابتة:

$$x_{i+1} = \cos(x_i)$$

مع ضمان التقارب للحل إذا أخذنا  $x_0 = 1$ .

تتحقق شروط المبرهنة (1)، حيث:

$$x_1 = \cos(x_0) = 0.540302$$

$$|g'(x)| = |-\sin x| \leq \sin(1) < 1 \quad \text{و:}$$

لجميع قيم  $x$  في الفترة:

$$I = [x_1, x_0] = [0.540302, 1]$$

وبما أن الدالة  $f(x) = x - \cos(x)$  تتغير إشارتها داخل هذه الفترة، نستنتج أن الجذر  $r$  يقع داخل  $I$  وبالتالي فإن  $x_i$  تؤول إلى  $r$  كلما ازدادت  $i$ . لاحظ هنا اعتبار  $k = \sin(1)$ .

1.9 تقدير الخطأ في طريقة نيوتن:

نلاحظ أن طريقة نيوتن لحل المعادلة  $f(x) = 0$  تعتمد على القاعدة:

$$(9.1) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

وهي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة إذا اعتبرنا:

$$(9.2) \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

وبالتالي فبالإمكان تطبيق نظرية التقارب لهذه الطريقة. ونبدأ بتفاضل  $g(x)$  وهو:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

أي أن:

$$(9.3) \quad g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

ولذلك وبما أن  $f(r) = 0$  فإن:

$$g'(r) = 0$$

بشرط أن  $f'(r)$  لا تساوي صفراً. وهذا يعني أنه إذا كانت  $g'(x)$  دالة مستمرة continuous في جوار  $r$  فإنه بالإمكان إيجاد فترة  $I$  تحتوي على  $r$  وتحقق:

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

لجميع قيم  $x$  في الفترة  $I$ . فإذا اخترنا  $x_0$  بحيث تنتمي كل من  $x_1$  و  $x_0$  إلى  $I$ ، فإن طريقة نيوتن تؤدي إلى الحل المطلوب، ونحصل على خاصية التقارب.

ولتقدير الخطأ في الدورة  $i + 1$  نستعمل (8.3) مع ملاحظة أن  $g'(r) = 0$  لطريقة نيوتن، أي:

$$(9.4) \quad e_{i+1} = -\frac{1}{2} e_i^2 g''(\xi_i)$$

وهذا يعني أن الخطأ المطلق في كل دورة يتناسب تقريباً مع مربع الخطأ السابق. فإذا كان الخطأ في الدورة  $i$  صغيراً (أقل من واحد) فإنه في الدورة  $i + 1$  يصغر أكثر. ولهذا يقال إن طريقة نيوتن من المرتبة الثانية Second order، وأحياناً نقول إن لها تقارباً تربيعياً.

مثال (9.1):

بين أن طريقة نيوتن لحل المعادلة

$$f(x) = x^3 - 3 = 0$$

تتقارب إلى الحل الصحيح في حالة  $x_0 = 2$ .

لاحظ أن  $r = \sqrt[3]{3}$  و

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad \text{من الصيغة (9.3)}$$

$$\begin{aligned} &= (x^3 - 3) (6x) / (3x^2)^2 \\ &= 2(x^3 - 3) / (3x^3) \\ &= 2/3 - 2/x^3 \end{aligned}$$

$$|g'(x)| < 1 \quad \text{إذن فإن:}$$

$$x > \sqrt[3]{1.2} \quad \text{لجميع قيم } x \text{ التي تحقق:}$$

$$x_0 = 2 \quad \text{باختيار}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{19}{12} < 2 \quad \text{نحصل على:}$$

وبالتالي فإن  $x_1$  و  $x_0$  تنتمي إلى الفترة:

$$I = [\sqrt[3]{2}, 2]$$

وحيث إن  $|g'(x)|$  هي أقل من الواحد في هذه الفترة، فإن التقارب يتحقق طبقاً للمبرهنة (7.1).

### تمارين (3)

- 1 - استعمل طريقة نيوتن لحل المعادلة  $x^3 + x \sin x = 2.85$  مبتدئاً بالقيمة  $x_0 = 1$ . توقف بعد 3 دورات، وبين إجابتك بالرسم.
- 2 - أرسم منحنى الدالة  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$  ثم أحسب 3 دورات في طريقة نيوتن مبتدئاً بالقيمة «أ»  $x_0 = 3$ ، ثم «ب»  $x_0 = 1$ ، ثم «ج»  $x_0 = 0$ . بين ما يحدث في كل حالة ووضح إجابتك على الرسم.
- 3 - اكتب برنامج فورتران للقيام بالحسابات في تمرين 2- مع وضع حد أعلى للدورات، وليكن 10؛ وإيقاف الدورات عندما  $|f(x_i)| < 0.0001$  أو  $|x_{i+1} - x_i| < 0.0001$ . اطيح قيم  $x_i$  و  $f(x_i)$  و  $f'(x_i)$  في كل دورة.



4 - استعمال طريقة نيوتن لحساب الجذر التكعيبي للعدد 4 صحيحاً في 5 خانات عشرية. إبدأ بالقيمة  $x_0 = 1.5$

5 - أكتب البرنامج الفرعي FUNCTION ASORT (A) الذي يحسب الجذر التربيعي للعدد الموجب A بطريقة نيوتن مبتدئاً بالقيمة  $x_0 = A/2$  مع وقف الدورات عندما  $|x_i^2 - A| < 10^{-7}$

6 - أكتب برنامج فورتران الذي يحسب الجذور الثلاثة للدالة

$$p(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

في هذا البرنامج تتم قراءة البيانات التالية:

$x_0$ : القيمة الابتدائية لأحد الجذور الثلاثة.

max: الحد الأعلى للدورات.

$\epsilon$ : رقم التسامح.

$a_i$ : معاملات  $p(x)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

استعمل طريقة نيوتن لإيجاد جذر حقيقي واحد ثم استعمل قانون حل معادلات الدرجة الثانية لإيجاد الجذرين الباقيين.

7 - بين أن طريقة نيوتن لحل المعادلة  $ax^3 - x + b = 0$  مكافئة لطريقة النقطة الثابتة  $x_{i+1} = g(x_i)$  حيث:

$$g(x) = (2ax^3 - b) / (3ax^2 - 1)$$

8 - استعمل طريقة النقطة الثابتة لحل المعادلة  $x = e^{-x}$  مبتدئاً بالقيمة  $x_0 = 1$  ومتتبعاً بالحالة  $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-3}$  وموضحاً إجابتك بالرسم.

9 - «أ» بين أن الدالة:

$$g(x) = x^2 - 4/x$$

لها نقطة ثابتة عند  $x = 2$ .

«ب» بين أن  $x = 2$  تعتبر حلاً للمعادلة  $f(x) = x^3 - x^2 - 4 = 0$

«ج» بين أن طريقة النقطة الثابتة لا تؤدي إلى الحل المطلوب لأي قيمة ابتدائية  $x_0$  إذا استخدمنا الدالة  $g(x)$  في «أ».

«د» بين أن طريقة نيوتن لحل المعادلة  $f(x) = 0$  تؤدي إلى

$$g(x) = (2x^3 - x^2 + 4) / (3x^2 - 2x)$$

10 - باستخدام المبرهنة (7.1)

«أ» بين أن طريقة النقطة الثابتة  $x_{i+1} = e^{-x_i}$  تتقارب لحل المعادلة  $x = e^{-x}$  لأي قيمة ابتدائية موجبة.

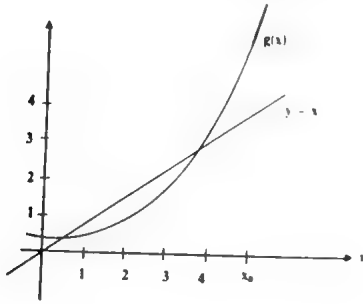
«ب» بين أن طريقة نيوتن لحل المعادلة  $x^2 - 2 = 0$  تتقارب للحل لأي قيمة ابتدائية أكبر من الواحد.

## نموذج اختبار - 1 -

الزمن: 1:30 (ساعة ونصف)

«حـ» استخدم العلاقة في «ب» في كتابة برنامج لحساب وطباعة  $c_i$  من  $i = 1$  إلى  $i = 10$  مبتدئاً بالقيم  $a_1 = 2$  و  $b_1 = 3$ .

س (3): «أ» بين على الرسم المرفق ما إذا كانت طريقة النقطة الثابتة  $x_{i+1} = g(x_i)$  تؤدي (أو لا تؤدي) إلى تقارب نحو أحد جذري المعادلة  $x = g(x)$  بالقيمة  $x_0$  المبينة.



«ب» استخدم طريقة نيوتن لحساب الجذر التربيعي  $\sqrt{5}$  مبتدئاً بالقيمة  $x_0 = 2$  وحساب دورة واحدة فقط.

«حـ» أكتب البرنامج الفرعي (A) FUNCTION SROOT الذي يحسب الجذر التربيعي للعدد الموجب A. في حالة A سالبة فإنه يطبع إنذاراً بذلك ويتوقف. استعمل طريقة نيوتن مع أخذ  $x_0 = A/2$  والتوقف عندما:

$$|x_1^2 - A| < 0.000001$$

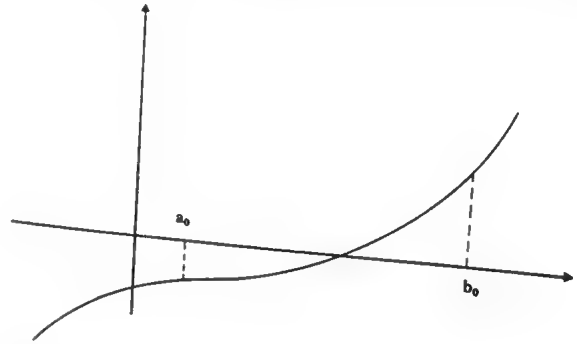
س (1): «أ» بين أن الفترة (0.1, 0.2) تحتوي على جذر للمعادلة:  $\frac{1}{x} - 7 = 0$

«ب» استعمل دورتين في طريقة التنصيف لحساب جذر المعادلة في «أ» مع استعمال الفترة الابتدائية (0.1, 0.2).

«حـ» أحسب الحد الأعلى للخطأ المطلق إذا كان عدد الدورات في الفقرة «أ» خمس دورات.

«د» أحسب دورة واحدة في طريقة الوضع الخاطئ لحساب جذر المعادلة في الفقرة «ب» مستعملاً الفترة الابتدائية (0.1, 0.2).

س (2): «أ» بين على الرسم المرفق دورتين لطريقة الوضع الخاطئ.



$$c_i = \frac{a_i b_i + 7}{a_i + b_i}$$

«ب» استنتج العلاقة:

من تطبيق طريقة القاطع في حل المعادلة  $x^2 - 7 = 0$

## الفصل الثاني

### حل معادلات ذات أكثر من مجهول

### Solution of Equations of Several Variables

#### 2.1 مقدمة

إذا كانت الطرق العددية ضرورية لكثير من المعادلات ذات المجهول الواحد، فإنها أكثر أهمية وضرورة إذا زاد عدد المجاهيل عن ذلك. نبدأ أولاً بالمثال البسيط التالي:

مثال (1.1):

أوجد حل المعادلتين الآتيتين:

$$f(x, y) = x^2 - y = 0$$

$$g(x, y) = y^2 - x = 0$$

الحل في هذه الحالة بسيط حيث من المعادلة الأولى يمكن وضع  $y = x^2$  وبالتالي تعويضاً في المعادلة الثانية فإن  $x^4 - x = 0$ ، أي أن الحل هو النقطتان:

$$y = 0, x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1, y = 1$$

ويمكن تمثيل المعادلتين بالرسم كما في شكل (1.1).

(1.2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

والمجهين :

(1.3)

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

فإن نظام المعادلات (1.1) يمكن كتابته على الشكل :

(1.4)

$$AX - B = 0$$

وهذا النظام - كما هو معلوم في دراسة الجبر الخطي - له حل واحد إذا كانت مصفوفة A لا تساوي صفراً. وإذا عرفنا الدالة F بأنها :

(1.5)

$$F(X) = AX - B$$

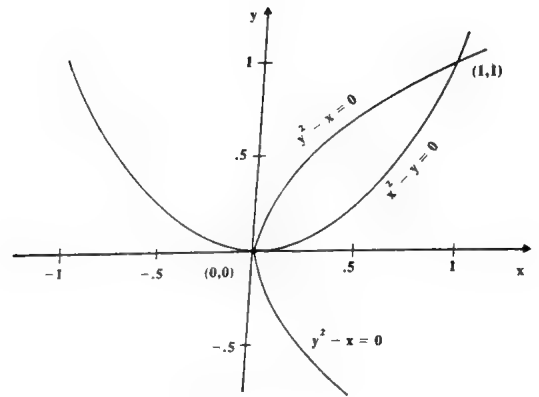
فإن النظام (1.1) يمكن كتابته على النحو  $F(X) = 0$  كما هو الحال في المعادلات ذات المجهول الواحد. إلا أنه يجب ملاحظة أن هذا الشكل ليس ممكنًا في كثير من الأحيان وبالذات إذا كانت المعادلات غير خطية.

## 2.2 طريقة جاكوبي Jacobi Method

في هذه الطريقة نستعمل طريقة النقطة الثابتة وذلك بتحويل نظام المعادلات  $F(X) = 0$  إلى الشكل :

(2.1)

$$X = G(X)$$



شكل (1.1)

لاحظ أن الجذور المطلوبة وهي في هذه الحالة  $(1,1)$ ,  $(0,0)$  هي نقطتا تقاطع المنحنيين.

مثال (1.2) :

اكتب الصورة العامة للمعادلات الخطية الآتية :

الصورة هي :

(1.1)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n - b_n = 0$$

حيث  $a_{ij}$  تسمى المعاملات و  $b_i$  الثوابت و  $x_i$  هي المتغيرات المجهولة وعددها  $n$  وهي أيضاً عدد المعادلات. إذا عرفنا المصفوفة :

مثال (2.1):

حل المعادلات التالية بطريقة جاكوبي:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 &= -6 \\ 2x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

ابدأ بالقيم الابتدائية:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$$

أحسب 3 دورات وقارن بالحل الصحيح:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$$

في البداية نضع المعادلات على الصورة:

$$x_1 = (5 - x_2)/3$$

$$x_2 = (-6 - x_1 + x_3)/(-4)$$

$$x_3 = (-1 - 2x_2)/5$$

وفي الدورة الأولى نحصل على:

$$x_1^{(1)} = (5 - x_2^{(0)})/3 = 1.3333$$

$$x_2^{(1)} = (-6 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)})/(-4) = 1.5$$

$$x_3^{(1)} = (-1 - 2x_2^{(0)})/5 = -0.6$$

وبنفس الطريقة، نحصل في الدورة الثانية على:

$$x_1^{(2)} = (5 - x_2^{(1)})/3 = 1.6667$$

$$x_2^{(2)} = (-6 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)})/(-4) = 1.9833$$

$$x_3^{(2)} = (-1 - 2x_2^{(1)})/5 = -0.8$$

ثم حساب المتجهات  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \dots$  من متجه ابتدائي  $X^{(0)}$  بحيث:

$$X^{(k+1)} = G(X^k) \quad (2.2)$$

وحيث الدليل الفوقي  $k$  يعني المتجه عند الدورة  $k$ .

وبالتحديد إذا كانت  $F(X)$  هي الدالة الخطية (1.5) فإن:

$$G(X) = D^{-1}[B - (A - D)X] \quad (2.3)$$

حيث  $D$  هي المصفوفة القطرية:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ومعكوسها  $D^{-1}$  هو أيضاً مصفوفة قطرية. لاحظ أن التعريف (2.3) يجعل (2.1) مكافئة للنظام  $AX = B$ ، وذلك لأن (2.1) تعني في هذه الحالة أن:

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n)/a_{22}$$

(2.5)

$$x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn}$$

أو بصورة أخرى فإن (2.1) تكافئ:

(2.6)

$$x_i = \left[ b_i - \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j \right] / a_{ii}$$

حيث  $i = 1, 2, \dots, n$ .

وفي الدورة الثالثة :

$$x_1^{(1)} = 1.0055$$

$$x_2^{(1)} = 2.1167$$

$$x_3^{(1)} = -1.0033$$

ومن الواضح ، أننا نقرب شيئاً فشيئاً من الحل الصحيح

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -1$$

والآن يمكن تحديد طريقة جاكوبي لحل المعادلات  $X = G(X)$  في خوارزمية التالية :

1 - حدد المعطيات :  $G(X)$  (وهي عدد  $n$  من الدوال في  $n$  متغير) و  $E$  (رقم التسامح) و  $\max$  (الحد الأعلى للدورات) و  $X^{(0)}$  (المتجه الابتدائي) .

2 - نفذ الخطوات التالية من  $i = 1$  إلى  $i = \max$  .

3 - احسب  $X^{(1)} = G(X^{(0)})$  .

4 - احسب  $t$  أكبر عنصر (في القيمة المطلقة) للمتجه :

$$E = X^{(1)} - X^{(0)}$$

$$t = \max_{0 \leq j \leq n} |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}| \quad \text{أي أن}$$

5 - إذا كانت  $t < \epsilon$  فاطبع  $X^{(1)}$  وتوقف .

6 - استبدل قيمة  $X^{(0)}$  بالمتجه  $X^{(1)}$  .

7 - ارجع إلى الخطوة (3) .

وبالإمكان الآن كتابة برنامج فورتران لهذه الطريقة مستعملين المعادلات في مثال (1) ، والتي منها يعرف الدالة التالية

```
FUNCTION G (I, X, N)
  DIMENSION X(N)
  IF (I.EQ. 1) G = (5 - X (2))1/3
  IF (I.EQ. 2) G = (- 6 - X (1) + X (3))1/4 (- 4)
  IF (I.EQ. 3) G = (- 1. - 2 * X (2))1/5
  RETURN
END
```

وحيث إن خطوة «4» تستلزم حساب أكبر عنصر في متجه  $E$  ، نكتب البرنامج الفرعي التالي

```
SUBROUTINE MAXIM (E, N, T)
  DIMENSION E (N)
  T = 0
  DO 10 I = 1, N
    AE = ABS (E (I))
    IF (AE.GT. T) T = AE
  CONTINUE
  RETURN
END
```

والآن يمكن كتابة برنامج فرعي لطريقة جاكوبي كالتالي . لاحظ أن القيم الابتدائية للمتجه  $X$  يتم تعريفها في البرنامج الرئيسي وأن  $XNEW$  هو متجه الحل .

```
SUBROUTINE JACOBI (X, G, N, EPS, MAX, XNEW, I, E)
  DIMENSION X(N), XNEW(N), E(N)
  DO 100 I = 1, MAX
    DO 10 J = 1, N
      XNEW (J) = G (J, X, N)
    DO 20 J = 1, N
      E(J) = XNEW (J) - X(J)
    CALL MAXIM (E, N, T)
    IF (T.LT. EPS) RETURN
    DO 30 J = 1, N
      X(J) = XNEW (J)
    CONTINUE
  RETURN
END
```

### 2.3 طريقة جاوس - سيدل (Gauss-Seidel Method)

لحل المعادلات التالية والتي عددها  $n$ :

$$x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

:

$$x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

نستعمل في طريقة جاوس - سيدل التابع التالي:

$$x_1^{(k+1)} = g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = g_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

$$x_n^{(k+1)} = g_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)})$$

أو بصورة عامة:

$$(3.2) \quad x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

حيث  $i$  من 1 إلى  $n$ . إذن فالفرق بين طريقة جاكوبي وطريقة جاوس - سيدل أن في الدورة  $k+1$  نستعمل في طريقة جاكوبي قيم  $x_i$  من الدورة السابقة  $k$  فقط، بينما نستعمل في طريقة جاوس - سيدل آخر قيمة تم حسابها.

في حالة أن  $g_i$  دوال خطية، أي أن نظام المعادلات على الصورة (2.5)، فإن (3.2) يمكن وضعها على الصورة:

$$(3.3) \quad x_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}] / a_{ii}$$

مثال (3.1):

حل المعادلات الخطية الآتية في المثال (2.1) بطريقة جاوس - سيدل، مبتدئاً بنفس القيم الابتدائية مع حساب 3 دورات فقط.

كما في طريقة جاكوبي، نضع المعادلات أولاً على الصورة:

$$x_1 = (5 - x_2) / 3$$

$$x_2 = (-6 - x_1 + x_3) / (-4)$$

$$x_3 = (-1 - 2x_2) / 5$$

وابتداء من  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$  نحصل في الدورة الأولى على:

$$x_1^{(1)} = (5 - x_2^{(0)}) / 3 = 1.3333$$

$$x_2^{(1)} = (-6 - x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) / (-4) = 1.5832$$

$$x_3^{(1)} = (-1 - 2x_2^{(1)}) / 5 = -0.8332$$

وبالطريقة نفسها نحصل في الدورة الثانية على:

$$x_1^{(2)} = (5 - x_2^{(1)}) / 3 = 1.1389$$

$$x_2^{(2)} = (-6 - x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) / (-4) = 2.0416$$

$$x_3^{(2)} = (-1 - 2x_2^{(2)}) / 5 = -1.0166$$

وفي الدورة الثالثة:

$$x_1^{(3)} = 0.9861$$

$$x_2^{(3)} = 2.0007$$

$$x_3^{(3)} = -1.0003$$

## ومقارنة بالحل الصحيح :

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= 2 \\x_3 &= -1\end{aligned}$$

نجد أن طريقة جاوس - سيدل قد أعطت في هذا المثال نتائج أفضل من طريقة جاكوبي، وهذا متوقع حيث إننا نستعمل في طريقة جاوس - سيدل القيمة  $x_i^{(k+1)}$  في الدورة  $(k+1)$  وهي أقرب إلى الحل الصحيح من  $x_i^{(k)}$ .

نلاحظ أن الخطوات التي تحدد طريقة جاوس - سيدل هي نفسها المستعملة في طريقة جاكوبي مع اختلاف الخطوة رقم (3) حيث لا بد هنا من استعمال (3.2). وتتضح هذه الخطوات في البرنامج التالي الذي يستعمل الدالة نفسها G المعرفة في البرنامج السابق لطريقة جاكوبي.

```
SUBROUTINE GSM (X, G, N, EPS, MAX, XNEW, I, E)
  DIMENSION X (N), XNEW (N), E (N)
  DO 100 I = 1, MAX
    DO 10 J = 1, N
      XNEW (J) = G (J, XNEW, N)
    DO 20 J = 1, N
      E (J) = XNEW (J) - X (J)
    CALL MAXIM (E, N, T)
    IF (T.LT.EPS) RETURN
    DO 30 J = 1, N
      X (J) = XNEW (J)
    CONTINUE
  RETURN
END
```

## 2.4 شروط كافية لتقارب طريقة جاكوبي وطريقة جاوس - سيدل

تعتبر الطريقتان المذكورتان من الطرق التابعية (iterative) وذلك تمييزاً لها عن الطرق المباشرة (direct methods). وتمتاز الطرق التابعية بأنها صالحة لحل المعادلات الخطية وغير الخطية على حد سواء، وهذه ميزة مهمة جداً حيث إن

أكثر المعادلات التي تواجه العلماء والمهندسين عادة ما تكون غير خطية. ولكن تبقى المشكلة التي تواجه الطرق التابعية وهي عدم ضمان التقارب إلى الحل الصحيح إلا في حالات معينة. ولدراسة هذه الحالات، نبدأ بمتسلسلة تايلور لدالة ذات أكثر من متغير واحد حول نقطة الحل  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$\begin{aligned}g_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) &= g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &+ \Delta x_1^{(k)} \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \Delta x_2^{(k)} \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ &+ \dots + \Delta x_n^{(k)} \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})\end{aligned}$$

حيث  $x_i^{(k)}$  هي قيم مجهولة تقع بين  $x_i$  و  $x_i^{(k)}$ ، وحيث:

$$\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i$$

تمثل مقدار الخطأ في التقدير  $x_i^{(k)}$ .

إذا استعملنا طريقة جاكوبي، فإننا نحصل على:

$$(4.2) \quad x_i^{(k+1)} = x_i + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \Delta x_j^{(k)}$$

حيث يقيم التفاضل الجزئي عند النقطة  $(x_1, \dots, x_n^{(k)}, \dots, x_n)$ . والآن إذا فرضنا أن:

$$(4.3) \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| \leq \sigma < 1$$

في نطاق يحتوي على نقطة الحل والنقط التقريبية، فإنه من (4.2) يتبع أن:

$$(4.4) \quad |\Delta x_i^{(k+1)}| \leq \sigma_i \max_j |\Delta x_j^{(k)}|$$

حيث  $\max_j$  تعني أكبر قيمة تأخذها  $|\Delta x_j^{(k)}|$  لجميع قيم  $j$  (من 1 إلى  $n$ ). إذا طبقنا العلاقة (4.4) من  $k=0$  إلى  $k=m$  نحصل على:

$$(4.5) \quad |\Delta x_i^{(m+1)}| \leq \sigma^m \max_j |\Delta x_j^{(0)}|$$



وحيث إن  $\sigma$  تم افتراضها بأنها أقل من الواحد فإن

$$\sigma^m \rightarrow 0$$

كلما زادت قيمة  $m$ ، وبالتالي فإن الخطأ  $\sigma^m$  يتحول إلى الصفر ويحدث التقارب المطلوب.

لاحظ أن شرط التقارب (4.3) قد يكون صعب التحقق من الناحية العملية وذلك لاشتراط صحته في نطاق يحتوي على جميع النقط التقريبية ونقطة الحل، ولكن النتيجة التي تحصلنا عليها مفيدة جداً في حد ذاتها كما سيتضح فيما بعد أول تطبيق لهذه النتيجة هو حل المعادلات الخطية بطريقة جاكوبي حيث

$$(4.4) \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[ b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right] / a_{ii}$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = - \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

وبالتالي:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| = \sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

إذن يتحقق التقارب نحو الحل إذا تحققت الحالة:

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

وهي تعني أن العناصر القطرية أكبر من حيث القيمة المطلقة من مجموع بقية العناصر في الصف نفسه، وتوصف مثل هذه المصفوفات بأنها ذات قطر سائد Diagonally dominant matrix. الشرط (4.5) هو أيضاً صالح لطريقة جاوس-سيدل، أي أن هذه الطريقة تحقق التقارب إذا استوفت المعادلات الخطية هذا الشرط. إلا أن إثبات ذلك يختلف بعض الشيء عن البرهان الذي قدمناه لطريقة جاكوبي.

مثال (4.1):

بين أن طريقة جاكوبي أو طريقة جاوس-سيدل تحقق التقارب عند حل المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ملاحظ هنا:

$$|a_{11}| = 5 > |1| + |-2| = |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$|a_{22}| = 4 > |1| + |1| = |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$|a_{33}| = 6 > |2| + |-1| = |a_{31}| + |a_{32}|$$

وهو الشرط الكافي لتحقيق التقارب في كلتا الطريقتين.

ملاحظة

حيث إن ترتيب المعادلات لا يؤثر على الحل الصحيح لهذه المعادلات، فمن الأفضل ترتيب هذه المعادلات بحيث يكون المعامل القطري أكبر ما يمكن من حيث القيمة المطلقة، وذلك لفرض إحداث التقارب.

مثال (4.2):

رتب المعادلات التالية بطريقة مناسبة لطريقة جاكوبي أو جاوس-سيدل:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

هذه المعادلات يجب ترتيبها على النحو التالي:

$$2x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3$$

بحيث أصبح العنصر القطري أكبر ما يمكن.

مثال (4.3):

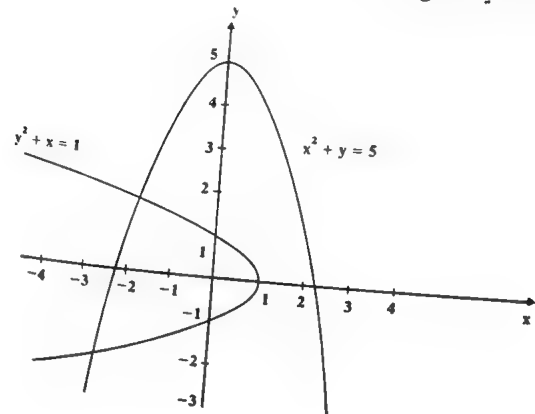
اكتب الصيغة المناسبة لحل المعادلتين التاليتين بطريقة جاكوبي:

$$x^2 + y = 5$$

$$y^2 + x = 1$$

هاتان المعادلتان لها حلان حقيقيان، ويمكن الحصول على قيم تقريبية لهما

من الرسم كما في شكل (2.1).



شكل (2.1)

واضح من الرسم أن نقطتي الحل هما تقريباً  $(-2, 2)$ ,  $(-2, -2)$ . لوضعنا:

$$x = g_1(x, y) \Rightarrow x = 1 - y^2$$

$$y = g_2(x, y) \Rightarrow y = 5 - x^2$$

فإن:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

إذن فعند النقطة  $(-2, 2)$  نجد أن:

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| = 4$$

$$\left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| = 4$$

والقيم نفسها عند النقطة  $(-2, -2)$ . وهذا يعني أن الشرط الكافي للتقارب (4.3) لا يتحقق، وعلينا إذن تغيير الدالتين  $g_1$  و  $g_2$  لتحقيق التقارب. إذا أخذنا:

$$g_1(x, y) = -\sqrt{5-y}$$

$$g_2(x, y) = \sqrt{1-x}$$

فإن هاتين الدالتين لهما النقطة الثابتة نفسها وهي تقريباً  $(-2, 2)$ . نلاحظ الآن أن:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{2} (5-y)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{2} (1-x)^{-1/2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

وبالتالي فعند النقطة  $(-2, 2)$  نجد أن :

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$$

$$\left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$$

وطبعاً هذا لا يعني أن شرط التقارب قد تحقق لأننا حققنا هذه المتباينة عند نقطة واحدة فقط بينما يجب تحقيقها في منطقة تحتوي على الحل وعلى النقطة الابتدائية. ولكن لقرب النقطة  $(-2, 2)$  من الحل الصحيح، فإنها لو أخذت كنقطة ابتدائية، هناك احتمال كبير لتحقيق التقارب.

### تمارين (1)

1 - بين بالرسم أن المعادلتين الآتيتين لهما حلان :

$$x^2 - y = 1$$

$$x - y^2 = -2$$

وأوجد من الرسم القيم التقريبية لهذين الحلين.

2 - إذا كان عمر شخص  $x$  مضافاً إلى مربع عمر شخص آخر  $y$  يساوي 425 وكان مربع عمر  $x$  مضافاً إلى عمر  $y$  هو 645 فأوجد بالرسم عمر كل منهما.

3 - حل المعادلات التالية بطريقة جاكوبي :

$$10x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

$$x_1 + 10x_2 - x_3 + x_4 = 11$$

$$x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 9$$

$$x_2 + x_3 + 10x_4 = 12$$

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$$

ابتداء من :

وحساب 3 دورات فقط.

4 - أكتب البرنامج الفرعي  $G(I, X, N)$  لوصف الدالة  $g_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$  في تمرين (3).

5 - أكتب البرنامج الفرعي  $G(I, X, N, A, B)$  لوصف الدالة :

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) / a_{ii}$$

واستعمل هذه الدالة لكتابة برنامج فرعي لحل المعادلات الخطية  $AX = B$  في  $N$  مجهول بطريقة جاكوبي.

6 - حلّ المعادلات في تمرين (3) بطريقة جاوس - سيدل.

7 - أكتب البرنامج المطلوب في تمرين (5) بطريقة جاوس - سيدل.

8 - «أ» بين أن حل المعادلات في تمرين (1) يناظر النقاط الثابتة للدوال :

$$g_1(x, y) = y^2 - 2, g_2(x, y) = x^2 - 1$$

«ب» بين أن طريقة جاكوبي باستخدام هاتين الدالتين لا تؤدي إلى الحل.

«ج» بين أن استخدام الدوال التالية :

$$g_1(x, y) = \sqrt{1+y}, g_2(x, y) = \sqrt{x+2}$$

في طريقة جاكوبي يؤدي إلى الحل الموجب إذا كانت نقطة البداية قريبة من هذا الحل. (أي الحل الذي يقع في المنطقة  $y > 0, x > 0$ ).

9 - رتب المعادلات التالية بطريقة مناسبة لاستخدام طريقة جاكوبي وجاوس - سيدل :

$$x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = -4$$

$$2x_1 + x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 3$$

### الفصل الثالث

## حل المعادلات الخطية بالطرق المباشرة Solution of Linear Equations by Direct Methods

تعتبر الطرق التتابعية وسيلة ضرورية لحل المعادلات غير الخطية، ولكن إذا كانت هذه المعادلات خطية فلدينا الاختيار بين استعمال هذه الطرق التتابعية أو الطرق الرياضية المباشرة المستعملة في الجبر الخطي، في هذا الفصل نتناقش مزايا وعيوب هذا النوع من الطرق.

### 3.1 طريقة الحذف لجاوس

لتوضيح هذه الطريقة، ندرس الحالة  $n = 4$  (أي أربع معادلات وأربعة مجاهيل) وهي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned} \quad (1.1)$$

الخطوة الأولى في الحل هي التخلص من  $x_1$  في المعادلة الثانية والثالثة والرابعة. نضرب أولاً المعادلة الأولى في  $t_{21}$  حيث:

$$t_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} \quad (a_{11} \neq 0) \quad (1.2)$$

10 - أكتب البرنامج الفرعي (A, B, N, C, D) SUBROUTINE REARG الذي يقوم بترتيب المعادلات  $AX = B$  وتصبح  $CX = D$  حتى يكون التقارب في طريقة جاكوبي أو جاوس - سيدل أكثر احتمالاً.

11 - استعمل البرنامج الفرعي في تمرين (10) في برنامج رئيسي لحل المعادلات الخطية  $AX = B$ . افترض أن  $N = 10$  وأن المعاملات تتم قراءتها في البرنامج.

وجمعها مع المعادلة الثانية لينتج :

$$a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4 = b_2^{(1)} \quad (1.3)$$

حيث :

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} + t_{21} a_{1j}$$

$$j = 2, 3, 4$$

$$b_2^{(1)} = b_2 + t_{21} b_1$$

وبضرب المعادلة الأولى في :

$$t_{31} = - \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

وإضافة الناتج للمعادلة الثالثة نحصل على :

$$a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + a_{34}^{(1)} x_4 = b_3^{(1)}$$

حيث :

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} + t_{31} a_{1j}$$

و :

$$b_3^{(1)} = b_3 + t_{31} b_1$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على المعادلة :

$$a_{42}^{(1)} x_2 + a_{43}^{(1)} x_3 + a_{44}^{(1)} x_4 = b_4^{(1)}$$

حيث :

$$a_{4j}^{(1)} = a_{4j} + t_{41} a_{1j}$$

$$b_4^{(1)} = b_4 + t_{41} b_1$$

(1.12)

$$t_{41} = - \frac{a_{41}}{a_{11}}$$

(1.13)

إذن للتخلص من  $x_1$  في المعادلة الثانية والثالثة والرابعة نجري التحويل :

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + t_{ij} a_{1j}$$

(1.14)

$$b_i^{(1)} = b_i + t_{i1} b_1$$

(1.15)

$$i, j = 2, 3, 4$$

حيث :

(1.5)

ويمكن التخلص من  $x_2$  في المعادلة الثالثة والرابعة وذلك بإجراء التحويلات :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + t_{i2} a_{2j}^{(1)}$$

(1.16)

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + t_{i2} b_2^{(1)}$$

(1.17)

حيث :

$$(a_{22}^{(1)} \neq 0 \text{ بافتراض } 0)$$

(1.7)

$$t_{i2} = - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

(1.18)

$$i, j = 3, 4$$

وأخيراً، نتخلص من  $x_3$  في المعادلة الرابعة بالتحويل :

$$a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} + t_{43} a_{34}^{(2)}$$

(1.19)

$$b_4^{(3)} = b_4^{(2)} + t_{43} b_3^{(2)}$$

(1.20)

حيث :

$$t_{43} = - \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad (a_{33}^{(2)} \neq 0)$$

(1.21)

وبذلك نكون قد حولنا نظام المعادلات (1.1) إلى الصورة المثلثية triangular form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)}$$

$$(1.22) \quad a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = b_3^{(2)}$$

$$a_{44}^{(3)}x_4 = b_4^{(3)}$$

وهو نظام سهل الحل بطريقة التعويض إلى الخلف back-substitution، أي:

$$x_4 = b_4^{(3)} / a_{44}^{(3)}$$

(1.23)

$$x_3 = [b_3^{(2)} - a_{34}^{(2)}x_4] / a_{33}^{(2)}$$

$$x_2 = [b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - a_{24}^{(1)}x_4] / a_{22}^{(1)}$$

$$x_1 = [b_1^{(0)} - a_{12}^{(0)}x_2 - a_{13}^{(0)}x_3 - a_{14}^{(0)}x_4] / a_{11}^{(0)}$$

مع ملاحظة أننا قد افترضنا أن  $a_{ii}^{(k)}$  لا تساوي صفراً حيث  $k = 0, 1, 2, 3$ .

واعتبار:

(1.24)

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, b_i^{(0)} = b_i$$

والآن نحاول تعميم الخطوات السابقة لنظام معادلات من  $n$  معادلة، كما يلي:

1 - نفذ الخطوة (2) من  $k=1$  إلى  $k=n-1$ .

2 - من  $i=k+1$  إلى  $i=n$ ، ومن  $j=k+1$  إلى  $j=n$ ،

أحسب:

(1.25)

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + t_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$$

(1.26)

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + t_{ik} b_k^{(k-1)}$$

حيث:

(1.27)

$$t_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$$

وعلى افتراض أن  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

3 - أوجد الحل بطريقة التعويض إلى الخلف، أي أحسب:

(1.28)

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}$$

ثم من  $i = n-1$  إلى  $i = 1$  أحسب:

(1.29)

$$x_i = [b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j] / a_{ii}^{(i-1)}$$

مثال (1.1):

حل المعادلات التالية بطريقة الحذف لجاوس.

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10$$

$$5x_1 + 4x_2 - x_3 = 14$$

أولاً نتخلص من  $x_1$  في المعادلة الثانية وذلك بضرب المعادلة الأولى في  $t_{21}$  حيث:

$$t_{21} = -1/2 = -0.5$$

وإضافة الناتج للمعادلة الثانية ليصبح:

$$1.5x_2 + 4.5x_3 = 7.5$$

وبنفس الطريقة نتخلص من  $x_1$  في المعادلة الثالثة حيث:

$$t_{31} = -5/2 = -2.5$$

ويصبح:

$$1.5x_2 + 1.5x_3 = 1.5$$

والآن نتخلص من  $x_2$  في المعادلة الأخيرة وذلك بضرب المعادلة الثانية (الجديدة) في:

$$t_{32} = -1.5/1.5 = -1$$

وإضافتها للمعادلة الثالثة لنتج:

$$-3x_3 = -6$$

إذن يتحول نظام المعادلات إلى الصورة المثلثية التالية:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$1.5x_2 + 4.5x_3 = 7.5$$

$$-3x_3 = -6$$

والحل الآن مباشر بطريقة التعويض إلى الخلف حيث:

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = [7.5 - 2(4.5)] / 1.5 = -1$$

$$x_1 = [5 - (-1) + 2] / 2 = 4$$

ملاحظة:

عادة ما نكتب الحل باستعمال المصفوفات على النحو التالي (بالنسبة للمثال السابق):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & -1 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1.5 & 4.5 & 7.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1.5 & 4.5 & 7.5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

### عملية الارتكاز Pivoting

لقد تجنّبنا حتى الآن التعرض للسؤال: ماذا لو كانت  $a_{kk}^{(k-1)} = 0$  مثلاً؟ ماذا لو كانت  $a_{11}$  في البداية تساوي صفراً؟ وحيث إن ترتيب المعادلات لا يؤثر على الحل، فبالإمكان تجنّب هذه المشكلة باستبدال المعادلة الأولى بمعادلة أخرى ولكن المعادلة رقم  $m$  بحيث  $a_{m1}$  لا يساوي صفراً، أو بطريقة أفضل نبحث عن المعادلة  $m$  التي فيها  $a_{m1}$  أكبر من  $a_{i1}$  لجميع قيم  $i$  من 1 إلى  $n$ . هذه العملية تجنّبنا القسمة على الصفر إلى جانب التقليل من الخطأ الناتج عن التقريب، وتسمى هذه العملية بالارتكاز Pivoting كما يسمى العنصر  $a_{kk}^{(k-1)}$  عامل الارتكاز Pivot element. إذن بصورة عامة، فإن عملية الارتكاز هي إيجاد أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة في العمود  $a_{ik}^{(k-1)}$  ابتداء من  $i = k$  إلى  $i = n$  واستبدال الصف الذي يقع فيه هذا العنصر بالصف  $i = k$ . أما إذا كان هذا العنصر الأكبر هو أيضاً يساوي صفراً فذلك يعني أن المحددة تساوي صفراً وليس هناك حل وحيد.

والآن نعيد خوارزمية الحذف لجأوس بصورة أكثر دقة:

- 1 - حدد المعطيات: - المصفوفة  $A$  ذات أبعاد  $n \times n$ .  
- المتجه الثابت  $B$  ويتكون من  $n$  عنصر  
- EPS (رقم صغير موجب لقياس عامل الارتكاز)
- 2 - ابتداء من  $k=1$  إلى  $k=n-1$  نفذ الخطوات (3)، (4).
- 3 - قم بعملية الارتكاز والاستبدال. إذا كان عامل الارتكاز صغيراً توقف.
- 4 - من  $i = k+1$  إلى  $i = n$  وكذلك من  $j = k+1$  إلى  $j = n$  أوجد:

$$t_{ik} = -a_{ik} / a_{kk}$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + t_{ik} a_{kj}$$

$$b_i \leftarrow b_i + t_{ik} b_k$$

حيث السهم  $\leftarrow$  يعني عملية «إحلال محل».

```

SUBROUTINE BKSUB (A, B, N, X)
DIMENSION A (N, N), B(N), X(N)
X(N) = B(N) / A(N, N)
DO 10 I = 2, N
J = N - I + 1
SUM = 0
J1 = J + 1
DO 20 K = J1, N
SUM = SUM + A(J, K) * X (K)
20 CONTINUE
X(J) = (B(J) - SUM) / A (J, J)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

والآن نستعمل البرنامجين في البرنامج الفرعي التالي لحل معادلات عددها N بطريقة الحذف لجاوس. في حالة أن المعادلات ليس لها حل وحيد فإن البرنامج يتوقف مع وضع المتغير IFLAG يساوي صفراً.

```

SUBROUTINE GEM (A, B, N, X, EPS, IFLAG)
DIMENSION A(N, N), B(N), X(N)
IFLAG = 0
N1 = N - 1
DO 100 k = 1, N1
CALL PIVOT (A, B, N, K, L)
IF (ABS (A(K, K)). LT. EPS) RETURN
K1 = K + 1
DO 100 I = K1, N
T = - A (I, k) / A (k, k)
DO 20 J = K1, N
A (I, J) = A (I, J) + T * A (K, J)
20 B(I) = B(I) + T * B (k)
100 CONTINUE
IF (ABS (A(N, N)). LT. EPS) RETURN
CALL BKSUB (A, B, N, X)
IFLAG = 1
RETURN
END

```

5- قم بعملية التعويض إلى الخلف كما في (1.28) و (1.29) لإيجاد الحل المطلوب.

لتحويل هذه الخطوات لبرنامج فورتران نبدأ أولاً بكتابة برنامج فرعي لعملية الارتكاز حيث يتم إيجاد أكبر عنصر أسفل العنصر القطري  $a_{kk}$  واستبدال الصفين L, K حيث  $a_{Lk}$  هو العنصر الأكبر قيمة مطلقة أسفل  $a_{kk}$ .

```

SUBROUTINE PIVOT (A, B, N, K, L)
DIMENSION A (N, N), B(N)
K1 = K + 1
L = K
BIG = A (K, K)
DO 10 I = K1, N
IF (ABS (A(I, K)) - ABS (BIG)) 10, 10, 20
BIG = A (I, K)
L = I
10 CONTINUE
C
IF (L .EQ. K) RETURN
DO 30 J = K, N
TEMP = A (K, J)
A(K, J) = A (L, J)
A (L, J) = TEMP
30 CONTINUE
TEMP = B (K)
B(K) = B(L)
B(L) = TEMP
RETURN
END

```

البرنامج الفرعي الآخر الذي نحتاج إليه في كتابة برنامج الحذف لجاوس هو البرنامج الذي يقوم بعملية التعويض إلى الخلف واسمه BKSUB. وهذا البرنامج يفترض أن العناصر القطرية لا تساوي صفراً.



```

SUBROUTINE DETRM (A, N, DET, EPS)
DIMENSION A (N, N)
N1 = N - 1
SIGN = 1
DO 60 K = 1, N1
CALL PIVOTD (A, N, K, M)
IF (K .NE. M) SIGN = SIGN * (-1)
IF (ABS (A (K, K)).GT. EPS) GO TO 10
DET = 0
RETURN
10 K1 = K + 1
DO 50 I = K1, N
T = - A (I, K) / A (K, K)
DO 40 J = K1, N
A (I, J) = A (I, J) + T * A (K, J)
40 CONTINUE
50 CONTINUE
60 CONTINUE
DET = 1
DO 70 I = 1, N
DET = DET * A (I, I)
70 CONTINUE
DET = DET * SIGN
RETURN
END

```

لاحظ أن هذا البرنامج الذي يحسب المحددة DET يحتاج إلى برنامج فرعي PIVOTD وهو مشابه للبرنامج الفرعي PIVOT مع الاختلاف الوحيد في عدم وجود المتجه B حيث لا لزوم له في PIVOTD.

### 3.3 طريقة كرامر Cramer's Rule

في هذه الطريقة، نتحصل على حل المعادلات  $AX = B$  من الصيغة:

$$(3.1) \quad x_k = \frac{\det(C_k)}{\det(A)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

حيث  $C_k$  هي المصفوفة A مع وضع المتجه B في العمود k من هذه

## 2.2 حساب المحددات Determinants

بالإمكان استعمال طريقة الحذف الجاوس لإيجاد قيمة محددة مصفوفة مربعة (أي تتكون من n صف و n عمود) وذلك على النحو التالي:

1 - تحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية مع ملاحظة أن إشارة المحددة تتغير كلما استبدلنا صفين.

2 - إيجاد قيمة المحددة من حاصل ضرب العناصر القطرية للمصفوفة المثلثية.

مثال (2.1):

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد محددة المصفوفة

مع استعمال عملية الارتكاز

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & .5 & 2.5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -.5 & 2.5 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{bmatrix}$$

$$= -4(2)(2.25) = -18$$

والآن نقوم بكتابة البرنامج التالي لحساب DET محددة المصفوفة A ذات الأبعاد  $N \times N$

المصفوفة. إلا أن هذه الطريقة لا تستعمل عادة في حل المعادلات الخطية خاصة إذا زاد عدد المعادلات عن ثلاث، وذلك لأنها تتطلب حساب  $n + 1$  محدد. ولما كانت كل محدد تتطلب تقريباً العمليات نفسها لحل المعادلات بطريقة الحذف، فإن المجهود المبذول في طريقة كرامر يساوي تقريباً  $n + 1$  من المرات ذلك في طريقة الحذف لجاوس.

### 3.4 حل عدة أنظمة من المعادلات ذات مصفوفة معاملات واحدة

أحياناً قد نحتاج لحل عدة أنظمة خطية من المعادلات ذات مصفوفة معاملات واحدة. فمثلاً، قد نحتاج لحل النظامين:

$$(4.1) \quad AX^{(1)} = B^{(1)}, AX^{(2)} = B^{(2)}$$

حيث:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, B^{(2)} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه بالإمكان كتابة (4.1) كنظام واحد وهو  $AX = B$  حيث:

$$4.2 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{bmatrix}$$

بصورة عامة فإن النظام  $AX = B$  حيث  $A$  هي  $n \times n$  والمصفوفات  $X, B$  هي  $n \times m$  (أي تحتوي على  $n$  صف و  $m$  عمود) يمثل  $n \times m$  معادلة. لاحظ أن  $m = 1$  تمثل النظام الواحد الذي سبقت دراسته.

بالإمكان تطبيق طريقة الحذف لجاوس بنفس الخطوات لحالة النظام الواحد ( $m = 1$ ) وذلك بتحويل (4.2) إلى نظام مثلي ثم اتباع طريقة التعويض إلى الخلف.

### 3.5 معكوس المصفوفة (Inverse)

معكوس المصفوفة  $A$  المتكونة من  $n$  صف و  $n$  عمود هو المصفوفة  $X$  المتكونة أيضاً من  $n$  صف و  $n$  عمود بحيث:

$$(5.1) \quad AX = I$$

حيث  $I$  هي مصفوفة الوحدة المتكونة هي أيضاً من  $n$  صف و  $n$  عمود وجميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر القطرية فهي تساوي الواحد الصحيح، أي أن:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

من هذا التعريف، يمكن حساب المعكوس وذلك بحل المعادلات (5.1) بطريقة الحذف لجاوس ثم استعمال التعويض إلى الخلف. لاحظ أنه عادة ما يرمز للمعكوس بالرمز  $A^{-1}$ ، وأنه إذا عرفنا  $A^{-1}$  فبالإمكان حل المعادلات  $AX = B$  من:

$$(5.2) \quad X = A^{-1} B$$

من مزايا هذه الطريقة (أي إيجاد المعكوس ثم الضرب في  $B$ ) أنه لو غيرنا في

المصفوفة B بحيث أصبحت C فإن الحل يبقى سهلاً أي لحل  $AX = C$  نوجد:

$$X = A^{-1} C$$

### تمارين (1)

1- بين أن المتجه:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

يعتبر حلاً لنظام المعادلات:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

واستعمل طريقة الحذف لجاوس لحل هذه المعادلات. استعمل 5 خطوات في الحسابات وقارن الحل الذي تحصل عليه بالحل الصحيح.

2- أكتب البرنامج الرئيسي اللازم لحل المعادلات في تمرين (1) مستعملاً البرنامج الفرعي GEM.

3- تتبع البرنامج الفرعي GEM واحسب عدد العمليات الحسابية اللازمة لتنفيذ هذا البرنامج إذا كانت  $N=10$ . عم النتيجة لأي  $N$ .

4- (طريقة جاوس - جورودان) تستعمل هذه الطريقة لحل النظام  $AX = B$  كما يلي: تستعمل المعادلة  $k$  للتخلص من  $x_k$  من جميع المعادلات الأخرى

(وليس من المعادلات  $k+1$  إلى  $n$  كما في طريقة الحذف لجاوس) لنحصل على النظام:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

وبهذا نستغني عن عملية التعويض إلى الخلف في طريقة جاوس.

أ- استعمل طريقة جورودان لحل نظام المعادلات في تمرين «1».

ب- أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة لحل المعادلات  $AX = B$ .

ج- أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة لحساب معكوس مصفوفة  $A$ .

5- حل المعادلات في تمرين «1» بطريقة كرامر. أحسب عدد العمليات الحسابية اللازمة لهذا الحل وقارنها بطريقة الحذف لجاوس.

6- أكتب البرنامج الفرعي لحل المعادلات  $AX = B$  بطريقة كرامر مستعملاً البرنامج الفرعي DETRM.

7- أحسب عدد العمليات الحسابية اللازمة لحل المعادلات  $AX = B$  حيث  $X, B$  متجهان من  $N$  عنصر بطريقة كرامر. قارن العدد بتمرين (3).

8- أكتب برنامجاً فرعياً لحل نظام المعادلات  $AX = B$  حيث  $A$  مصفوفة مربعة من  $n$  صف وعمود، و  $X$  مصفوفة تتكون من  $n$  صف و  $m$  عمود و  $B$  مصفوفة تتكون من  $n$  صف و  $m$  عمود، وذلك بطريقة الحذف لجاوس.

9- استعمل البرنامج الفرعي في تمرين (8) في كتابة برنامج فرعي لإيجاد معكوس مصفوفة مربعة.

10 - أحسب معكوس المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أ - بطريقة الحذف لجاوس.

ب - بطريقة جاوس - جوردان (انظر تمرين 4).

11 - أكتب برنامجاً رئيسياً لحساب المتجهات  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(10)}$  من العلاقة:

$$AX^{(k+1)} = X^{(k)}$$

والمتجه الابتدائي:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وحيث A المصفوفة في تمرين «10».

أ - مستعمل البرنامج الفرعي GEM.

ب - مستعمل البرنامج الفرعي INVERS لإيجاد معكوس مصفوفة.

ج - أي الطريقتين أفضل؟

12 - إثبت العلاقة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t_{21} & 1 & 0 \\ -t_{31} & -t_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ماذا تستنتج من هذه العلاقة؟

13 - لاحظ أن البرنامج الفرعي BKSUB يستعمل لحل المعادلات  $UX = B$

حيث U مصفوفة مثلثية علوية (أي أن جميع عناصرها التي تحت القطر أصفار). بطريقة مشابهة، أكتب البرنامج الفرعي المناظر لحل المعادلات  $LX = B$  حيث L مصفوفة مثلثية سفلية (أي أن جميع عناصرها التي فوق القطر أصفار).

14 - أكتب برنامجاً فرعياً لحل المعادلات  $AX = B$  حيث  $A = LU$

والمصفوفتان U, L مثلثتان الأولى علوية والثانية سفلية (انظر تمرين 13). استعمل البرنامجين الفرعيين في تمرين (13).

15 - أكتب برنامجين فرعيين. الأول لإيجاد معكوس مصفوفة مثلثية سفلية L،

والثاني لإيجاد معكوس مصفوفة مثلثية علوية U، واستعمل هذين البرنامجين في إيجاد معكوس مصفوفة A حيث  $A = LU$  (لاحظ أن:  $A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$ ).

## الفصل الرابع

### الاستكمال interpolation

#### 4.1 مقدمة

في حياتنا اليومية، نستخدم «الاستكمال» بالبداية دون أن نعرف ما هو. فإذا كانت درجة الحرارة عند الساعة الثانية 27° وكانت عند الساعة الثالثة 29° فماذا نتوقع أن تكون درجة الحرارة عند الساعة الثانية والنصف؟ طبعاً الجواب 28°. وذلك لأن درجة الحرارة تزداد كما يبدو بمعدل درجتين في الساعة وبالتالي تزداد درجة واحدة في نصف ساعة. ولكن ماذا عن درجة الحرارة عند الساعة الثانية وعشرين دقيقة مثلاً؟ ذلك يحتاج إلى شيء من الحسابات وهذا هو موضوع هذا الفصل.

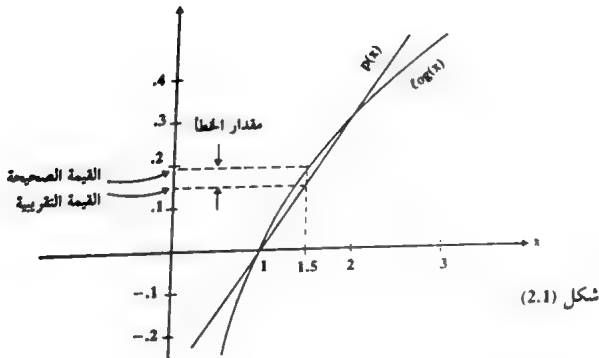
#### 4.2 الاستكمال الخطي (Linear Interpolation)

تسمى الدالة:

$$(2.1) \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

بدالة متعددة الحدود Polynomial (وتعرف أحياناً بالإسم كثيرة الحدود وأحياناً بالحدودية) وتسمى  $n$  هنا بدرجة هذه الدالة. في حالة  $n = 1$  تمثل  $p(x)$  هندسياً خطاً مستقيماً. وكما هو معلوم، فإنه يكفي لتحديد خط مستقيم نقطتان

ويمكن توضيح ذلك بالرسم كما في الشكل (2.1).



شكل (2.1)

بصورة عامة فإن إيجاد خط الاستكمال:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

المرار بالنقطتين:  $(x_0, y_0)$  ،  $(x_1, y_1)$

يتطلب حل النظام:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

### 2.3 الاستكمال التربيعي (Quadratic Interpolation)

وهو عملية إيجاد متعددة الحدود من الدرجة الثانية (قطع مكافئ):

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

المارة بالنقط الثلاث:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

يمرّ بهما، ويسمى في هذه الحالة بخط الاستكمال حيث يمكن استعماله لتقدير (استكمال) نقطة ثالثة.

مثال (2.1):

أوجد خط الاستكمال المار بالنقطتين (1,0) و (2,0.301).

في هذه الحالة نفترض:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

$$p(1) = a_0 + a_1 = 0$$

إذن:

$$p(2) = a_0 + 2a_1 = 0.301$$

وهما معادلتان خطيتان في مجهولين اثنين هما المعاملان  $a_0, a_1$  وحلها هو:

$$a_1 = .301 \quad a_0 = -.301$$

$$p(x) = .301(x - 1)$$

وبالتالي فإن:

ملاحظة:

نلاحظ في المثال السابق أن:

$$\log(1) = 0$$

$$\log(2) \approx .301$$

وبالتالي فإن  $p(x)$  التي نحصلنا عليها هي تقريب للدالة  $\log(x)$  في الفترة (1,2). فمثلاً: يمكننا تقريب  $\log(1.5)$  من  $p(1.5)$  كالآتي:

$$\log(1.5) \approx .301(1.5-1)$$

$$= .1505$$

والقيمة الصحيحة هي:

$$\log(1.5) = .1761$$

#### 4.4 الاستكمال بمتعددة الحدود من الدرجة n

متعددة الحدود (2.1) المارة بالنقط :

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

يجب أن تحقق ما يلي :

$$p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1$$

$$p(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n$$

وهي تمثل n + 1 معادلة خطية، ويمكن كتابتها على الشكل :

$$(4.1) \quad \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

وتسمى مصفوفة هذا النظام بمصفوفة فاندروند Vandermonde ونرمز لها بالرمز V. لاحظ أن :

$$V_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

$$V_{ij} = x_{i-1}^{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots, n+1)$$

$$V_{ij+1} = x_{i-1} V_{ij}$$

ويجب أن تحقق ما يلي :

$$p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2$$

أو بصورة أخرى :

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

مثال (3.1) :

أوجد متعددة الحدود التي تمر بالنقط :

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 1$$

نظراً لوجود ثلاث نقط، فإن درجة متعددة الحدود هي 2، النظام (3.1)

يعطي في هذه الحالة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ويحل هذا النظام نحصل على :

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = -1$$

أي أن :

$$p(x) = 1 + 2x - x^2$$

لاحظ أن هذه الدالة تحقق فعلاً النقط الثلاث المعطيات.

دالة  $f(x)$  وعدد ثابت  $h$  يسمى عادة الزيادة increment، فلنأخذ نعرف مؤثر الفروق المتقدمة  $\Delta$  من:

$$(5.1) \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i + h) - f(x_i)$$

ونعرف مؤثر الفروق المتأخرة  $\nabla$  من:

$$(5.2) \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_i - h)$$

ونعرف مؤثر الفروق المركزية  $\delta$  من:

$$(5.3) \quad \delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2} = f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2})$$

ونعرف مؤثر الإزاحة  $E$  من:

$$(5.4) \quad E y_i = y_{i+1} = f(x_i + h)$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta y_i = E y_i - y_i$$

$$(5.5) \quad \Delta y_i = (E - I) y_i$$

حيث  $I$  هو مؤثر الوحدة، أي أن:

$$(5.6) \quad I y_i = y_i$$

من (5.5) نحصل على العلاقة:

$$\Delta = E - I$$

$$(5.7) \quad E = \Delta + I$$

الفروق المذكورة أعلاه تعتبر من المرتبة الأولى، ويمكن تعريف مؤثر الفروق المتقدمة من المرتبة الثانية بأنه:

$$(5.8) \quad \Delta^2 y_i = \Delta (\Delta y_i)$$

مثال (4.1):

أكتب مصفوفة فاندربونند إذا كانت

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

مثال (4.2):

برنامج فرعي لإيجاد معاملات متعددة الحدود بحل النظام (4.1). المعطيات في هذا البرنامج هي النقط  $(X, Y)$  وعددها  $M$  والإخراج هو المعاملات  $C$  وعددها أيضاً  $M$  (أي أن الدرجة هي  $M-1$ ). نستخدم في هذا البرنامج حل المعادلات (4.1) بواسطة البرنامج الفرعي GEM الذي كتبناه في الفصل السابق.

```
SUBROUTINE INTRP (X, Y, M, C, EPS, IFLAG, V)
  DIMENSION X(M), Y(M), C(M), V(M, M)
  DO 10 I = 1, M
    V(I, 1) = 1
    N = M - 1
    DO 20 J = 1, N
      V(I, J + 1) = X(I) * V(I, J)
    CALL GEM (V, Y, M, C, EPS, IFLAG)
  RETURN
END
```

#### 4.5 مؤثرات الفروق المتتالية Finite Difference Operators

إذا كانت لدينا فئة من الأعداد المرتبة  $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$  أو كانت لدينا



أي أن:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i &= \Delta (y_{i+1} - y_i) \\ &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i\end{aligned}$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^n y_i = \Delta (\Delta^{n-1} y_i) \quad \text{وبصورة أعم فإن:}$$

هو مؤثر الفروق المتقدمة من المرتبة  $n$ . وبالمثل نعرف:

(5.9)

$$E^n y_i = E (E^{n-1} y_i)$$

وبالتالي فإن:

(5.10)

$$E^3 y_i = E E (E y_i)$$

$$= E(E y_{i+1}) = E y_{i+2}.$$

$$= y_{i+3}$$

وبصورة عامة:

(5.11)

$$E^n y_i = y_{i+n}$$

مثال (5.1):

بين أن:

(5.12)

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

من العلاقة (5.11):

ومن (5.7):

$$y_3 = E^3 y_0$$

$$E^3 y_0 = (I + \Delta)^3 y_0$$

$$= I^3 y_0 + 3I^2 \Delta y_0 + 3I \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

يتحقق المطلوب.

نلاحظ في هذا المثال أن مبرهنة ذات الحدين بالإمكان تطبيقها على مؤثرات الفروق المنتهية، أي أن:

$$(5.13) \quad (I + \Delta)^n = I + c_1^n \Delta + c_2^n \Delta^2 + \dots + c_n^n \Delta^n$$

حيث  $c_k^n$  هي معاملات ذات الحدين، أي:

$$(5.14) \quad c_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

وبالتالي فإن:

$$y_n = E^n y_0$$

$$= (I + \Delta)^n y_0$$

$$(5.15) \quad = I y_0 + c_1^n \Delta y_0 + c_2^n \Delta^2 y_0 + \dots + c_n^n \Delta^n y_0$$

$$= y_0 + n \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^n y_0$$

وبالمثل فإن:

$$\Delta^n y_0 = (E - I)^n y_0$$

$$= E^n y_0 - c_1^n E^{n-1} y_0 + c_2^n E^{n-2} y_0 - \dots \pm y_0$$

$$(5.16) \quad = y_n - c_1^n y_{n-1} + c_2^n y_{n-2} - \dots \pm y_0$$

4.6 طريقة نيوتن للاستكمال بالفروق المتقدمة

إذا كانت الاحداثيات  $x_i$  على أبعاد متساوية بحيث:

$$(6.1) \quad x_{i+1} - x_i = h$$

فإن متعددة الحدود:

$$(6.2) \quad p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0) (x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

تحقق ما يلي:

بما أن قيم المتغير  $x$  على أبعاد متساوية، فبالإمكان تطبيق طريقة نيوتن. لحساب  $\Delta^i$  تكون الجدول التالي (والذي يسمى عادة بجدول الفروق):

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	3	0	4	6
1	1	3	4	10	-
2	2	7	14	-	-
3	3	21	-	-	-

إذن:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} (x - x_0) (x - x_1) \\
 &\quad + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) \\
 &= 3 + \frac{4}{2!} x(x-1) + \frac{6}{3!} x(x-1)(x-2) \\
 &= 3 + 2x(x-1) + x(x-1)(x-2)
 \end{aligned}$$

مثال (6.2):

إذا كان:  $\log(1) = 0, \log(2) = .30103, \log(3) = .47712$

فأوجد قيمة تقريبية للمقدار  $\log(2.5)$

أولاً نكون جدول الفروق:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$
1	0	.30103	-.12494
2	.30103	.17609	
3	.47712		

$$p(x_0) = y_0$$

$$p(x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x_1 - x_0) = y_0 + \Delta y_0 = y_1$$

$$\begin{aligned}
 p(x_2) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x_2 - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x_2 - x_0) (x_2 - x_1) \\
 &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \\
 &= (I + \Delta)^2 y_0 = E^2 y_0 = y_2
 \end{aligned}$$

$$p(x_n) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x_n - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x_n - x_0) (x_n - x_1)$$

$$+ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x_n - x_0) (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$

$$= y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}{n!} \Delta^n y_0 = (I + \Delta)^n y_0 = y_n$$

وبالتالي فإن متعددة الحدود (6.2) تمرّ على النقط:

$$(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

أي أنها تحقق خصائص دالة الاستكمال.

مثال (6.1):

أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة للنقط التالية:

$x$	0	1	2	3
$y$	3	3	7	21

إذن

$$p(x) = .30103 (x - 1) - \frac{.12494}{2} (x - 1) (x - 2)$$

إذن:

$$\log(2.5) = .30103 (1.5) - .12494 (1.5) (0.5) / 2 = .4046925$$

ملاحظة:

لاحظ أن القيمة الصحيحة (من الآلة الحاسبة) هي  $\log(2.5) = .39794$

مثال (6.3):

برنامج لطريقة نيوتن بالفروق المتقدمة

البرنامج الفرعي التالي NTNFD يستقبل في الإدخال القيم:

$$X(1), X(2), \dots, X(N)$$

$$Y(1), Y(2), \dots, Y(N)$$

ويستعمل طريقة نيوتن في الاستكمال لتقدير القيمة YP وهي قيمة Y عند XP. لاحظ استعمال المصفوفة:

$$D(I, J) = \Delta^J y_I$$

حيث:

$$J = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$I = 1, 2, \dots, N - J$$

ومن ذلك فإن:

$$D(I, J + 1) = D(I + 1, J) - D(I, J)$$

وأيضاً:

$$P(XP) = Y(1) + D(1, 1) * T(1) + D(1, 2) * T(2) + \dots + D(1, N - 1) * T(N - 1)$$

حيث:

$$T(I) = (XP - X(1)) (XP - X(2)) \dots (XP - X(I)) / (I! H^I)$$

لاحظ أيضاً من هذا التعريف أن:

$$T(I + 1) = T(I) * (XP - X(I + 1)) / ((I + 1) * H)$$

وبالتالي نستخدم هذه العلاقة في البرنامج في حساب متعددة الحدود.

```

SUBROUTINE NTNFD (X, Y, N, XP, YP, D)
DIMENSION X(N), Y(N), D(N, N), T(N)
N1 = N - 1
H = X(2) - X(1)
DO 10 I = 1, N1
  D(I, 1) = Y(I + 1) - Y(I)
  DO 20 J = 2, N1
    NJ = N - J
    DO 30 I = 1, NJ
      D(I, J) = D(I + 1, J - 1) - D(I, J - 1)
      T(I) = (XP - X(I)) / H
      N2 = N - 2
      DO 30 I = 1, N2
        T(I + 1) = T(I) * (XP - X(I + 1)) / ((I + 1) * H)
      YP = Y(I)
      DO 40 J = 1, N1
        YP = YP + D(I, J) * T(J)
      RETURN
    END
  
```

#### 4.7 طريقة لاجرانج Lagrange's Method

نلاحظ أن طريقة نيوتن باستعمال الفروق المتقدمة غير صالحة للاستعمال عندما تكون  $x_i$  على أبعاد مختلفة. في هذه الحالة بالإمكان استعمال طريقة لاجرانج.

نبدأ أولاً بتعريف متعددات الحدود التالية:

مثال (7.1):

استعمل طريقة لاجرانج لإيجاد متعددة الحدود لاستكمال النقاط التالية:

x	0	1	3	4
y	-9	-8	18	55

أولاً نوجد  $\ell_0(x)$ ,  $\ell_1(x)$ ,  $\ell_2(x)$ ,  $\ell_3(x)$  كما يلي:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{-1}{12} (x-1)(x-3)(x-4)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6} (x)(x-3)(x-4)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = -\frac{1}{6} x(x-1)(x-4)$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{1}{12} x(x-1)(x-3)$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + y_2 \ell_2(x) + y_3 \ell_3(x) \\ &= \frac{3}{4} (x-1)(x-3)(x-4) - \frac{4}{3} x(x-3)(x-4) \\ &\quad - 3x(x-1)(x-4) + \frac{55}{12} x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

ملاحظة:

لكي يتأكد الطالب من صحة  $p(x)$  عليه أن يعوض قيم  $x$  ليحصل على  $y_i$ . لاحظ أيضاً أنه ليس من المطلوب تبسيط  $p(x)$  إلى الشكل العادي لمتعددة الحدود.

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)}$$

(7.1)

$$\ell_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})}$$

والمطلوب الآن إيجاد المعاملات  $c_i$  بحيث تمر متعددة الحدود:

$$p(x) = c_0 \ell_0(x) + c_1 \ell_1(x) + \dots + c_n \ell_n(x)$$

على النقاط:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

أي أن:

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$$

ولكن نلاحظ أولاً أن:

$$\ell_0(x_0) = 1, \ell_0(x_1) = 0, \dots, \ell_0(x_n) = 0$$

$$\ell_1(x_0) = 0, \ell_1(x_1) = 1, \dots, \ell_1(x_n) = 0$$

$$\ell_n(x_0) = 0, \ell_n(x_1) = 0, \dots, \ell_n(x_n) = 1$$

وبالتالي فإن:

$$c_i = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

أي أن متعددة الحدود التي تستكمل النقاط  $(x_i, y_i)$  هي:

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x)$$

t	1	3	4	5	7
P	20	23	18	16	18
u	5	8	10	14	11
v	45	47	50	48	47

هذا المثال يوضح أهمية طريقة لاجرانج في مثل هذه الحالات التي تتطلب استكمال عدة متغيرات تعتمد على متغير واحد. في هذا البرنامج يتم حساب  $AL(I)$ ، حيث  $I$  من 1 إلى 5، مرة واحدة، ويستعمل في حساب الاستكمال لجميع المتغيرات.

```

DIMENSION T(5), P(5), U(5), V(5), AL(5)
DATA T/1., 3., 4., 5., 7./, P/20., 23., 18., 16., 18./
DATA U/5., 8., 10., 14., 11./, V/45., 47., 50., 48., 47./
TP = 2.
CALL LGRNG (T, 5, TP, AL)
PP = 0
PU = 0
PV = 0
DO 10 I = 1, 5
PP = PP + AL (I) * P(I)
PU = PU + AL (I) * U (I)
PV = PV + AL (I) * V(I)
10 CONTINUE
WRITE (*, 20) TP, PP, PU, PV
20 FORMAT (' T = ', F5.1, ' P = ', F10.5, ' U = ', F10.5,
* ' V = ', F10.5)
STOP
END

```

4.8 تقدير الخطأ في الاستكمال بمتعددة الحدود  
نقدم هنا بدون برهان الصيغة لتقدير الخطأ في الاستكمال بمتعددة الحدود،  
علماً بأن هذا البرهان موجود في أغلب كتب التحليل العددي (انظر مثلاً كتاب  
المؤلفين Barden-Faires-Reynolds).

مثال (7.2):  
برنامج لحساب الدوال  $\ell_i(x)$

من المهم أن نلاحظ أن  $\ell_i(x)$  لا تعتمد على قيم  $y_i$  وبالتالي فلو غيرنا في قيم  $y_i$  فإن المجهود الذي نبذله للحصول على  $p(x)$  جديدة لا يذكر. وعلى ذلك، فإن البرنامج الفرعي الذي نكتبه لطريقة لاجرانج يحسب  $\ell_i(x)$  عند  $x_p = x$  (أي نقطة محددة معلومة) بحيث يتم حساب  $p(x)$  في برنامج فرعي آخر (أو برنامج رئيسي). إذن فالمعطيات في برنامجنا الفرعي هي القيم  $X(1), X(2), \dots, X(M)$  فقط بالإضافة إلى النقطة المطلوب الاستكمال عندها وهي  $XP$ .

```

SUBROUTINE LGRNG (X, M, XP, AL)
DIMENSION X(M), AL (M)
DO 10 I = 1, M
UP = 1
DN = 1
DO 20 J = 1, M
IF (J.EQ. I) GO TO 20
UP = UP * (XP - X(J))
DN = DN * (X(I) - X(J))
20 CONTINUE
AL (I) = UP/DN
10 CONTINUE
RETURN
END

```

مثال (7.3):  
البيانات التالية تمثل قياسات للمتغيرات الثلاثة:  $p, v, u$  التي تعتمد على  $t$  كما هو مبين بالجدول، والمطلوب كتابة برنامج رئيسي لتقدير هذه المتغيرات عند  $t=2$ .

### مبرهنة:

إذا كانت القيم  $x_0, x_1, \dots, x_n$  غير متساوية وتقع داخل الفترة  $[a, b]$  وكانت الدالة  $f(x)$  قابلة للتفاضل  $n + 1$  مرة بحيث تكون  $f^{(n+1)}(x)$  دالة متصلة في الفترة  $[a, b]$ ، فإنه توجد قيمة ما في  $[a, b]$  بحيث تقع في داخل  $[a, b]$  ويحيث:

$$(8.1) \quad f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

حيث  $p(x)$  هي متعددة الحدود التي تستكمل النقاط:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)).$$

مثال (8.1):

أوجد الحد الأعلى للخطأ في استكمال  $\sin(1.1)$  من  $\sin(1)$  و  $\sin(1.2)$  بمجموعة الحدود من الدرجة الأولى.

في هذه الحالة  $f(x) = \sin(x)$ ، إذن:

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x)$$

بتطبيق (8.1) حيث  $n = 1$  نحصل على:

$$|p(x) - f(x)| = \frac{f''(\xi)}{2} (x - 1)(x - 1.2)$$

أي أن:

$$|p(1.1) - f(1.1)| \leq \frac{1}{2} (0.1)(0.1) = 0.005$$

إذن فإن الخطأ لن يتجاوز في هذه الحالة 0.005.

### تمارين (1)

1 - إذا كانت درجة الحرارة عند الساعة 2:00 ظهراً 28° وكانت عند الساعة 3:00 ظهراً 30° فاستعمل الاستكمال الخطي لتقدير درجة الحرارة عند الساعة 2:30 وعند الساعة 2:20.

2 - استعمل الاستكمال الخطي لتقدير  $\sin(1.55)$  وكذلك  $\sin(1.53)$  علماً بأن  $\sin(1.6) = 0.99957$ ,  $\sin(1.5) = 0.9975$ .

3 - استعمل الاستكمال التربيعي لتقدير  $\log(1.2)$  إذا كان  $\log(2) = .3010$  و  $\log(1) = 0$  و  $\log(1.5) = .17609$ .

أ. باستعمال مصفوفة فاندروند.

ب. بطريقة نيوتن للفروق المتقدمة.

ج. بطريقة لاجرانج.

4 - اكتب البرنامج الفرعي SUBROUTINE LININT (X, Y, XP, YP) الذي يستكمل القيمة YP عند XP بمعلومية النقطتين (X(1), Y(1)) و (X(2), Y(2)). استعمل هذا البرنامج لاستكمال  $\exp(0.5)$  من القيمتين  $\exp(0) = 1$ ,  $\exp(1) = 2.7183$ .

5 - استعمل البرنامج الفرعي INTRP لاستكمال  $\exp(0.5)$  من النقاط  $x_i = 0, .2, .4, .6, .8$  حيث  $(x_i, \exp(x_i))$ .

6 - ما هي العلاقة بين الاستكمال الخطي وطريقة القاطع (أو الوضع الخاطئ)؟ وضح إجابتك بحل المعادلة  $f(x) = e^x - 2$  ابتداءً من  $x = 0$  و  $x = 1$  وحساب دورتين.

7 - اثبت أن:

$$\nabla \Delta = \delta^2$$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

$$E^{-1} = I - \nabla$$

8 - من العلاقة «د» في تمرين 7-، وباستعمال مرهنة ذات الحدين، استنتج صيغة نيوتن للفروق المتأخرة:

$$p(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2! h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\nabla^n y_n}{n! h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

حيث  $x_i$  على أبعاد متساوية بمسافة  $h$

9 - إذا كانت متعددة الحدود من الدرجة  $n$

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

تحقق شروط الاستكمال  $p(x_i) = y_i$  لجميع  $(x_i, y_i)$  من  $i = 0$  إلى  $i = n$ .

«د» استنتج النظام المثلثي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & d_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & d_{31} & d_{32} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

حيث:  $d_{i1} = 1$

$$d_{ij+1} = (x_{i-1} - x_{j-1}) d_{ij}$$

لجميع قيم:

$$j = 1, 2, \dots, n-1, i = 1, 2, \dots, n$$

«ب» طبق هذه الطريقة (وتسمى طريقة نيوتن للفروق المقسومة) في إيجاد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة للنقط:  $(0,0), (1,1), (2,8), (3,27)$

«د» بين أنه إذا كانت  $x_i$  على أبعاد متساوية فإن  $p(x)$  تؤول إلى صيغة نيوتن للفروق المتقدمة.

«د» أكتب برنامجاً فرعياً لإيجاد  $a_0, a_1, \dots, a_n$  بحل النظام المثلثي في «د».

10 - أوجد قيمة تقريبية للجذر التربيعي والتكعيبي  $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$  وذلك باستكمال الدالة  $f(x) = 3^x$  للنقاط  $x = -1, 0, 1, 2$ .

11 - اكتب البرنامج الفرعي  $\text{FUNCTION YNF}(X, Y, N, XP)$  الذي يستعمل القيم  $X(I), Y(I)$  حيث  $I$  من 1 إلى  $N$ ، وبحسب قيمة الدالة  $\text{YNF}$  عند النقطة  $XP$  بطريقة نيوتن بالفروق المتقدمة، واستعمل هذا البرنامج الفرعي لحساب  $\tan(x)$  للقيم  $x = .2, .4, .6$  بمعلومية  $\tan(x)$  عند القيم  $x = 0.1, .3, .5, .7$ .

12 - قم بالتعديلات اللازمة في البرنامج الفرعي  $\text{LGRNG}$  بحيث يتم استكمال قيمة  $Y$  عند نقطة  $XP$  في البرنامج. ثم استعمل هذا البرنامج المعدل في برنامج رئيسي لاستكمال الدالة  $f(x) = 2^x$  عند النقطة 0.5 بمعلومية النقط  $x = -1, 0, 1, 2$ .

13 - إذا كان عدد سكان بلد ما في الخمس سنوات الماضية متوفاً لديك، فاستعمل طريقة نيوتن في كتابة برنامج فرعي للتنبؤ بعدد السكان في هذه السنة.

14 - أوجد الحد الأقصى للخطأ في استكمال  $\cos(0.55)$  من «د»  $\cos(0.5)$   $\cos(0.6)$  وشم من «ب»  $\cos(0.5)$ ،  $\cos(0.6)$ ،  $\cos(0.7)$ . حقق لإجابتك في الحالتين.

«ح» اكتب برنامجاً فرعياً لتقدير عدد السكان في سنة من السنوات (يتم إدخالها) بمعلومية عدد السكان في السنوات الثلاث الماضية (أيضاً يتم إدخالها) وذلك باستعمال الاستكمال التريعي.

نموذج اختبار - 2 -

الزمن: (1:30) (ساعة ونصف)

س (1) : «أ» احسب دورة واحدة بطريقة جاوس - سيدل لحل المعادلات التالية:

$$3x + y + z - 1 = 0$$

$$x - 2y - 1 = 0$$

$$2y + 3x - 2 = 0$$

افترض القيم الابتدائية  $x = 0, y = 0, z = 0$

«ب» هل يتحقق التقارب في «أ» عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟

س (2) : «أ» حل المعادلات التالية بطريقة الحذف لجاوس:

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2$$

«ب» اكتب برنامجاً فرعياً SUBROUTINE FDSUB(A,B,N,X) الذي يوجد المتجه X بحل النظام  $AX = B$  حيث A مصفوفة مثلثية سفلية (أي أن جميع عناصرها التي فوق القطر أصفار).

س (3) : «أ» إذا كان عدد الطلبة في سنة 1984 هو 17,000 وفي سنة 1987 هو 19,400 فقدر عدد الطلبة في 1988، باستعمال الاستكمال الخطي.

«ب» أوجد متعلدة الحدود من الدرجة الثانية التي تلقي مع الدالة  $f(x) = \sin x$  عند  $x = 0$  و  $x = \frac{\pi}{2}$ .



## التكامل العددي Numerical Integration

### 5.1 مقدمة

من المواضيع الهامة في الطرق العددية إيجاد قيمة تقريبية لتكامل دالة يصعب تكاملها بالطرق الرياضية المعروفة في مادة التفاضل والتكامل «Calculus». فمثلاً التكامل:

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx$$

لا تجدي معه الطرق الرياضية المعروفة ونضطر لإيجاد قيمة تقريبية له بالطرق العددية، ولكن بالإمكان جعل هذا التقريب قريباً من الحل الصحيح قريباً كافياً للأغراض العملية.

### 5.2 طريقة شبه المنحرف Trapezoidal Rule

لتقريب التكامل:

$$(2.1) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

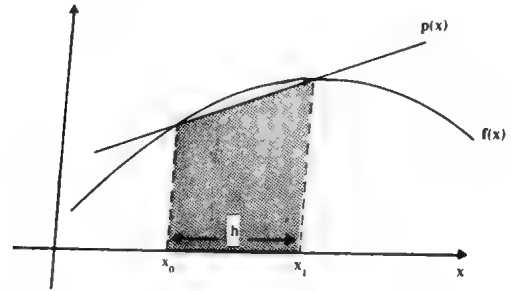
تعتمد طريقة شبه المنحرف على تقريب  $f(x)$  بواسطة  $p(x)$  حيث  $p(x)$  هي كثيرة الحدود من الدرجة الأولى:

$$(2.2) \quad p(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h} (x - x_0)$$

أي أن  $p(x)$  تستكمل النقطتين  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$  بخط الاستكمال.  
إذن:

$$(2.3) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} p(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

أي أن التكامل (2.1) قد تم تقريبه بمساحة شبه المنحرف الواقع تحت المنحنى  $f(x)$  وبين المستقيمين  $x = x_0$ ,  $x = x_1$  كما في الشكل 2.1.



شكل (2.1) طريقة شبه المنحرف

لاحظ أن في حالة التكامل من  $x_0$  إلى  $x_2$  بحيث  $x_1$  هي نقطة المنتصف

بينها، أي:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$$

فإن:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] \\ &= h \left[ \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) \right] \end{aligned}$$

وبصورة عامة، فبالإمكان التكامل من  $x_0$  إلى  $x_n$  وذلك بتقسيم الفترة  $[x_0, x_n]$  إلى فترات صغيرة طول كل منها  $h$  وعددها  $n$  بحيث:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

و:

(2.4)

$$x_{i+1} - x_i = h$$

(2.5)

و:

(2.6)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

وباستعمال تقريب شبه المنحرف نحصل على:

(2.7)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right]$$

مثال (2.1): قرب التكامل:

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{x}$$

مستخدماً طريقة شبه المنحرف: «أ» باستعمال فترة واحدة «ب» باستعمال فترتين.

«أ» في حالة استعمال فترة واحدة فإن  $x_0 = 2$  و  $x_1 = 3$  وبالتالي  $h = 1$  و:

$$I \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] = \frac{5}{12} = .416667.$$

«ب» عند استعمال فترتين فإن:

$$h = \frac{3-2}{2} = 0.5$$

$$x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 3$$

$$I = h \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right) \right] = 0.408333$$

### ملاحظة:

ولتبسيط التكامل نفترض أن:  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$

لنحصل على:

$$(3.2) \quad p(x) = f(-1) + \left[ \Delta f(-1) + \frac{\Delta^2 f(-1)}{2} x + \frac{\Delta^2 f(-1)}{2} x^2 \right]$$

إذن:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x) dx &= 2f(-1) + \frac{\Delta^2 f(-1)}{3} \\ &= 2f(-1) + \frac{1}{3} [f(-1) - 2f(0) + f(1)] \\ &= \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) \end{aligned}$$

وباعتبار هذه القيمة كتقريب للقيمة الصحيحة I نحصل على قاعدة سمبسن:

$$(3.4) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)]$$

ولكن هذه الحالة خاصة لحدود التكامل  $(-1, 1)$ . لتعميمها على الفترة  $(a, b)$  نقوم بالتعويض التالي:

$$(3.5) \quad t = 1 + \frac{2(x-b)}{b-a} \Leftrightarrow x = b + \frac{(t-1)(b-a)}{2}$$

نلاحظ هنا أن  $t = 1$  عندما  $x = b$  و  $t = -1$  عندما  $x = a$ ، وأن:

$$(3.6) \quad dt = \frac{2}{b-a} dx$$

أي أن:

$$(3.7) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f[x(t)] dt = h \int_{-1}^1 g(t) dt$$

حيث:

$$(3.8) \quad g(t) = f[x(t)]$$

في المثال السابق، من السهل تكامل الدالة  $\frac{1}{x}$  لنحصل على:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_2^3 = \ln(3/2) = 0.405465$$

إذن في الحالة «أ»، الخطأ = 0.01201

وفي الحالة «ب» الخطأ = 0.002868

مما يشير إلى أن الخطأ يتناقص بزيادة عدد الفترات.

مثال (2.2):

برنامج للتكامل بطريقة شبه المنحرف  
في البرنامج الفرعي التالي نحسب القيمة التقريبية AREA للدالة  
F(X) المعرفة في برنامج فرعي آخر. حدود التكامل هي (A, B)  
وعدد التقسيمات (أي الفترات) هو N.

```
SUBROUTINE TRAP (F, A, B, AREA, N)
H = (B - A) / N
AREA = (F(A) + F(B)) / 2.
IF (N.EQ.1) GO TO 20
N1 = N - 1
DO 10 I = 1, N1
AREA = AREA + F(A + I * H)
AREA = AREA * H
RETURN
END
```

### 5.3 طريقة سمبسن (Simpson's Method)

بدلاً من تقريب  $f(x)$  بواسطة خط الاستكمال  $p(x)$  نستعمل في طريقة سمبسن الاستكمال التربيعي:

$$(3.1) \quad p(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} (x - x_0)(x - x_1)$$

حيث:

$$S_1 = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})$$

و:

$$S_2 = f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-2})$$

مثال (3.1):

استعمل طريقة سمبسن لتقريب:

$$I = \int_1^2 e^x dx$$

وذلك بتقسيم الفترة (1, 2) إلى 4 فترات.

$$f(x) = e^x, h = \frac{2-1}{4} = 0.25 \text{ في هذه الحالة}$$

إذن:

$$I \approx \frac{(0.25)}{3} [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)]$$

$$= 4.670875$$

ملاحظة:

في المثال السابق، بالإمكان الحصول على القيمة الصحيحة للتكامل رياضياً وهي:

$$e^2 - e^1 = 4.670777$$

أي أن الخطأ المطلق هو:

$$\text{error} = .000098$$

وهو (كما يبدو) صغير بما فيه الكفاية، مما يشير إلى دقة طريقة سمبسن.

$$h = \frac{b-a}{2} \quad \text{و:}$$

وذلك نظراً لتقسيم (a, b) إلى فترتين (a, x<sub>1</sub>) و (x<sub>1</sub>, b) باعتبار

$$x_2 = b, x_0 = a$$

من (3.4), (3.7) نحصل على:

$$\int_a^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

أما إذا قسمنا فترة التكامل إلى n فترة صغيرة طول كل منها h (لاحظ ضرورة أن يكون n عدداً زوجياً)، فنحصل على:

$$\int_a^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx$$

$$+ \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$+ \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

وبشيء من التنظيم، نحصل على القاعدة العامة لطريقة سمبسن:

$$(3.9) \quad \int_a^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3)$$

$$+ 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

أو بصورة أخرى أكثر اقتصاداً في العمليات الحسابية:

$$(3.10) \quad \int_a^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_n) + 4S_1 + 2S_2]$$

إذن بالإمكان حساب خطأ القطع في صيغة شبه المنحرف (Truncation error) بأخذ الفرق بين القيمة الصحيحة (4.1) والقيمة التقريبية (4.2) هو:

$$(4.3) \quad e_i \approx -\frac{h^3}{12} f''(x_i)$$

حيث تم حذف الحدود الأخرى التي تحتوي على  $h$  أس 4 فما فوق، وهي حدود صغيرة في قيمتها إذا كانت  $h$  أقل من الواحد. يوصف الخطأ (4.3) بالخطأ الموضعي local error، وهو الخطأ الناتج من تقريب التكامل على الفترة  $(x_i, x_{i+1})$ . أما الخطأ الكلي global error فهو مجموع الأخطاء الموضعية، أي أن:

$$(4.4) \quad e \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f''(x_i)$$

وإذا اعتبرنا وجود  $\xi$  بحيث:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(x_i) = f''(\xi)$$

فإن:

$$(4.4) \quad e \approx c h^2$$

حيث:

$$(4.5) \quad c = \frac{(b-a)}{12} f''(\xi)$$

وبالتالي فإن طريقة شبه المنحرف تعتبر من المرتبة الثانية لأن الخطأ الكلي يتناسب تقريباً مع مربع  $h$ .

مثال (4.1):

أوجد حداً أعلى لخطأ الصيغة في حساب:

$$\int_1^2 e^x dx$$

بطريقة شبه المنحرف:

«أ» باستعمال 10 فترات. «ب» باستعمال 20 فترة.

مثال (3.2):

برنامج فرعي للتكامل بقاعدة سمسن  
البرنامج التالي يستعمل الصيغة (3.10) لحساب التكامل التقريبي للدالة  $F(x)$  المعرفة من برنامج فرعي منفصل. حدود التكامل هي  $(A, B)$  وعدد التقسيمات هو العدد الزوجي  $N$ .

FUNCTION SMPSN (F, A, B, N)

H = (B - A) / N

N1 = N - 1

N2 = N - 2

S1 = 0

S2 = 0

DO 10 I = 1, N1, 2

S1 = S1 + F(A + I \* H)

IF (N2.EQ. 0) GO TO 30

DO 20 I = 2, N2, 2

S2 = S2 + F(A + I \* H)

SMPSN = (H/3) \* (F(A) + F(B) + 4 \* S1 + 2 \* S2)

RETURN

END

#### 5.4 تقدير الخطأ في طريقة شبه المنحرف

باستعمال متسلسلة تايلور:

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i) + \frac{1}{2} (x - x_i)^2 f''(x_i) + \dots$$

نحصل على:

$$(4.1) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) + \frac{h^3}{6} f''(x_i) + \dots$$

أما باستعمال طريقة شبه المنحرف، فنحصل على:

$$(4.2) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + \dots]$$

$$= h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) + \frac{h^3}{4} f''(x_i) + \dots$$

في هذا البرنامج نستفيد من SUBROUTINE TRAP مع ملاحظة أن  $T(h)$  نحصل عليها باستعمال  $N$  فترة، بينما  $T\left(\frac{h}{2}\right)$  نحصل عليها باستعمال  $2 \cdot N$  فترة.

```
SUBROUTINE REXTM (F, A, B, AREA, N)
CALL TRAP (F, A, B, TH, N)
CALL TRAP (F, A, B, TH2, 2*N)
AREA = (4./3.) * TH2 - (1./3.) * TH
RETURN
END
```

ملاحظة:

مع أن البرنامج المذكور يؤدي العمل المطلوب، إلا أنه لا يراعي الناحية الاقتصادية في الحسابات، إذ إن حساب الدالة  $F$  عند النقط  $x_i$  يتم مرتين دون تخزين، وهي نقطة ضعف في البرنامج يجب تعديلها بإعادة كتابة البرنامج الفرعي TRAP بحيث يتم حساب الدالة  $F$  وتخزين القيم في متجه  $Y$  في البرنامج المادي لهذا البرنامج الفرعي (انظر تمرين 8).

5.6 تقدير الخطأ في طريقة سمبسن

إذا كانت  $S_1$  هي القيمة التقريبية للتكامل:

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx \quad (6.1)$$

بطريقة سمبسن، فإن:

$$S_1 = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_{1+1}) + f(x_{1+2})] \quad (6.2)$$

وباستعمال متسلسلة تايلور، نحصل على:

$$I_1 = \int_a^b \left[ f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i) + \frac{1}{2} (x - x_i)^2 f''(x_i) + \frac{1}{3!} (x - x_i)^3 f'''(x_i) + \frac{1}{4!} (x - x_i)^4 f^{(4)}(x_i) + \dots \right] dx$$

حيث  $f^{(4)}$  تعني المشتقة الرابعة للدالة  $f$ .

أ، بما أن  $f(x) = e^x$ ،  $f'(x) = e^x$ ،  $f''(x) = e^x$ ، إذن فإن أعلى قيمة نأخذها  $f''(x)$  في فترة التكامل (1, 2) هي  $e^2$ . من (4.5) نجد أن:

$$\text{الخطأ} \leq \frac{(2-1)}{12} \left( \frac{1}{10} \right)^2 e^2 = 0.006$$

ب، إذا كانت  $n = 20$ ، فإن:

$$\text{الخطأ} \leq \frac{(2-1)}{12} \left( \frac{1}{20} \right)^2 e^2 = \frac{.006}{4} = .0015$$

## 5.5 طريقة الاستكمال لريتشاردسن Richardson Extrapolation Method

بالإمكان الاستفادة من صيغة الخطأ (4.4) للحصول على خطأ أقل (أي من مرتبة أعلى). فإذا اعتبرنا القيمة  $I$  هي القيمة للصحيحة (أو الأقرب للصحيحة) للتكامل، واعتبرنا  $T(h)$  القيمة التي نحصل عليها من طريقة شبه التحرف باستعمال فترات طولها  $h$  فإن الخطأ الكلي هو:

$$I - T(h) \approx c h^2 \quad (5.1)$$

حيث  $c$  مقدار ثابت، أي لا يعتمد على  $h$ ، وهو مقدار مجهول القيمة. فإن استعملنا ضعف عدد الفترات، فإن  $h$  تنقلص إلى النصف، وبالتالي فإن الخطأ يصبح:

$$I - T\left(\frac{h}{2}\right) \approx c \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{c}{4} h^2 \quad (5.2)$$

إذا اعتبرنا (5.1) و (5.2) كمعادلتين في مجهولين هما  $c$ ،  $I$ ، فإن الحل هو:

$$I \approx \frac{4}{3} T\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} T(h) \quad (5.3)$$

تعطي هذه الصيغة تقريباً (5.3) أكثر دقة من  $T(h)$  و  $T\left(\frac{h}{2}\right)$ .

مثال (5.1):  
أكتب برنامج فرعي لطريقة الاستكمال لريتشاردسن

بتكامل حدود المتسلسلة، فإن :

$$I_1 = 2h f(x_1) + \frac{(2h)^2}{2} f'(x_1) + \frac{(2h)^3}{3!} f''(x_1) + \frac{(2h)^4}{4!} f'''(x_1) + \frac{(2h)^5}{5!} f^{(4)}(x_1) + \dots$$

في نفس الوقت، نستعمل متسلسلة تايلور للحصول على :

$$S_1 = \frac{h}{3} f(x_1) + \frac{4h}{3} \left[ f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_1) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_1) + \dots \right] + \frac{h}{3} \left[ f(x_1) + 2hf'(x_1) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_1) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x_1) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x_1) + \dots \right]$$

وبالتالي فإن الخطأ في  $S_1$  هو :

$$e_1 = I_1 - S_1$$

$$(6.3) \quad e_1 = \left[ \frac{32}{120} - \frac{4}{3(24)} - \frac{16}{3(24)} \right] h^5 f^{(4)}(x_1) + \dots$$

أي أن :

$$(6.4) \quad e_1 = c_1 h^5$$

حيث :

$$(6.5) \quad c_1 = \frac{-1}{90} f^{(4)}(x_1)$$

للحصول على الخطأ الكلي نجمع الأخطاء الموضعية :

$$e = e_0 + e_2 + \dots + e_{n-2}$$

$$(6.6)$$

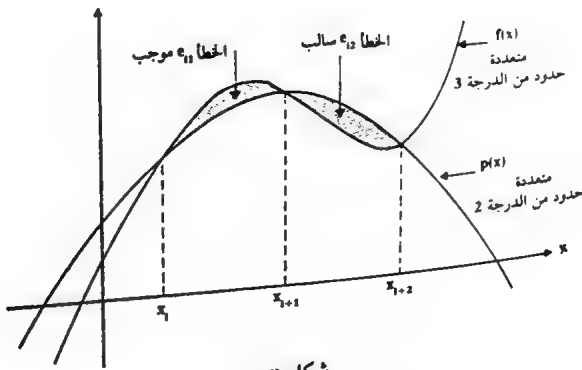
$$e = \frac{n}{2} \left( \frac{-1}{90} \right) f^{(4)}(\xi) h^5 = - \frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) h^4$$

حيث  $\xi$  نقطة تكون عندها المشتقة الرابعة مساوية متوسط القيم  $f^{(4)}(x_i)$   $(i = 0, 2, \dots, n-2)$ .

ملاحظات :

«1» الخطأ الموضعي كما هو واضح من (6.3) يساوي صفراً إذا كانت  $f(x)$  متعددة الحدود من الدرجة الثالثة أو أقل. وهذا غير متوقع إذ إننا قربنا في الأساس الدالة  $f(x)$  بمتعددة الحدود من الدرجة الثانية وليس الثالثة، ويمكن تعليل ذلك كما في الرسم (شكل 6.1).

«2» يتناسب الخطأ الكلي مع  $h$  مرفوعة للأس 4، أي أن المرتبة في طريقة «مبسّس أعلى بدرجتين من طريقة شبه المنحرف» (وليس درجة واحدة كما هو متوقع).



شكل (6.1)

الخطأ الموضعي في هذه الحالة : (أي المبينة في شكل 6.1)  
 $e_1 = e_{11} + e_{12} = 0$

## تمارين

- 1 - أحسب القيمة التقريبية للتكاملات التالية بطريقة شبه المنحرف مستعملًا  $P_1$ ، 3 فترات و  $P_2$ ، 6 فترات. أحسب القيمة الصحيحة كلما أمكن ذلك، ومنها أحسب الخطأ في التقريب المحسوب في  $P_1$ ، و  $P_2$ .  
 i)  $\int_1^2 x^2 dx$  ii)  $\int_1^2 \frac{dx}{1-x^2}$  iii)  $\int_1^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$
- 2 - أكتب برنامجاً رئيسياً واحداً لحساب التكاملات في تمرين (1) مستعملًا البرنامج الفرعي TRAP
- 3 - أعد كتابة البرنامج الفرعي TRAP مستبدلاً  $F$  بـ  $f$  في المتغيرات بالمتجه  $Y$  الذي يتم حسابه في البرنامج الرئيسي من  $y_i = f(x_i)$  حيث  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- 4 - أحسب القيمة التقريبية للتكاملات التالية بطريقة سمن مستعملًا  $P_1$ ، 4 فترات و  $P_2$ ، 6 فترات. أحسب القيمة الصحيحة كلما أمكن ذلك ومنها أحسب الخطأ في التقريب المتحصل عليه في  $P_1$  و  $P_2$ .  
 i)  $\int_1^2 x^3 dx$  ii)  $\int_1^2 e^{x^2} dx$  iii)  $\int_1^2 \ln(x) dx$
- 5 - أكتب برنامجاً رئيسياً لحساب التكاملات في تمرين «4» مستعملًا البرنامج الفرعي SMPSN.
- 6 - أعد كتابة البرنامج الفرعي SMPSN مستبدلاً الدالة  $F$  في متغيرات البرنامج بالمتجه  $Y$  الذي يتم حسابه في البرنامج الرئيسي من العلاقة  $y_i = f(x_i)$  حيث  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- 7 - أوجد الحد الأعلى للخطأ في حساب  $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$  بطريقة شبه المنحرف  $P_1$  باستعمال 8 فترات. و  $P_2$  باستعمال 12 فترة. كم عدد الفترات التي نحتاجها حتى لا يزيد الخطأ عن  $10^{-5}$ ؟

- 8 - أعد كتابة البرنامج الفرعي REXTM الذي يستعمل طريقة الاستكمال لرونشدرس مستعملًا المتجه  $Y$  بدلاً من الدالة  $F$  بحيث يتم حساب جميع قيم  $Y$  في البرنامج الرئيسي مرة واحدة.
- 9 - أوجد مرتبة الخطأ الموضعي في التقريب التالي:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] - \frac{h^3}{12} f''(x_i)$$

ثم أوجد الصيغة العامة لهذا التقريب في حالة التكامل على الفترة  $[a, b]$  ونفسبب  $n$  من الفترات.

10 - التقريب التالي

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx 2h f(x_i)$$

يسمى بطريقة نقطة المنتصف (Midpoint Method).

- أوضح هذه الطريقة بالرسم.
- أوجد مرتبة الخطأ الموضعي.
- أوجد الصيغة العامة في حالة تقسيم فترة التكامل إلى  $n$  فترة.
- أكتب برنامجاً فرعياً لحساب تكامل  $F$  من  $A$  إلى  $B$  باستعمال  $N$  فترة بهذه الطريقة.

11 - بين أن تقريب الدالة  $f(x)$  بالمتعددة الحدود من الدرجة الأولى  $p(x)$  التي تمر بالنقطتين  $(0, f(0))$ ،  $(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$  يؤدي إلى التقريب:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right)$$

وأوجد مرتبة هذه الطريقة.

- 12 - لتكن  $f(x)$  متعددة الحدود من الدرجة الثالثة و  $p(x)$  متعددة الحدود من الدرجة الثانية المطابقة لـ  $f(x)$  عند  $x_i$  و  $x_{i+1}$  و  $x_{i+2}$ . علّل أن الخطأ في تكامل  $f(x)$  من  $x_i$  إلى  $x_{i+2}$  بطريقة سمن يساوي صفراً بإثبات أن:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} [f(x) - p(x)] dx = - \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} [f(x) - p(x)] dx$$



## التفاضل العددي Numerical Differentiation

### 6.1 مقدمة

ليس الغرض من التفاضل العددي - كما هو الحال في التكامل العددي - إيجاد قيمة عددية لتفاضل دالة نعجز عن تفاضلها تحليلياً، فمعظم الدوال تكون عادة سهلة التفاضل، ولكن الغرض الأساسي هو الحصول على صيغ للتفاضل يمكن استعمالها فيما بعد لحل ما يسمى بالمعادلات التفاضلية.

### 6.2 صيغ من المرتبة الأولى للمشتقة الأولى

باستعمال متسلسلة تايلور للدالة  $f(x)$  حول النقطة  $x_i$  وعند النقطة  $x = x_{i+1}$  نحصل على:

$$(2.1) \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi_i)$$

حيث  $\xi_i$  نقطة تقع في الفترة  $[x_i, x_{i+1}]$  و  $h$  كالمادة هي الزيادة:

$$h = x_{i+1} - x_i$$

من (2.1) نحصل على:

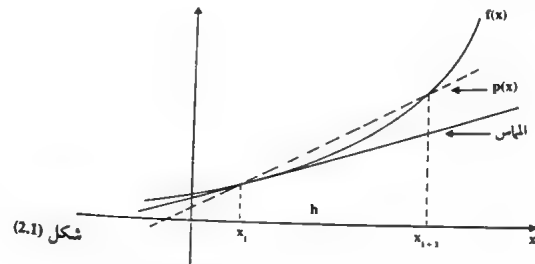
$$(2.2) \quad f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} f''(\xi)$$

وبالتالي إذا كانت  $h$  صغيرة، يكون التقريب:

$$(2.3) \quad f'(x_i) \approx \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

مقبولاً، ومخطأ يتناسب طردياً مع  $h$ ، أي ذا مرتبة أولى.

هندسياً، التقريب (2.3)، يقرب ميل المماس للدالة  $f(x)$  عند النقطة  $(x_i, f(x_i))$  بميل المستقيم الواصل بين النقطتين  $(x_i, f(x_i))$ ،  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ ، كما في الرسم (شكل 2.1).



لاحظ أننا إذا قربنا  $f(x)$  بمتعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(x) = f(x_i) + \frac{\Delta f(x_i)}{h}(x - x_i)$$

وأخذنا التقريب:

$$f'(x_i) \approx p'(x_i) = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

فإننا نحصل على النتيجة نفسها (2.3).

والآن بالإمكان الحصول على صيغة أخرى لتقريب  $f'(x)$  وذلك بنشر متسلسلة تايلور عند النقطة  $x_{i-1}$  حول النقطة  $x_i$ ، أي أن:

(2.4)

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_i)$$

حيث  $\xi_i$  نقطة مجهولة تقع في الفترة  $[x_{i-1}, x_i]$ . من هذه الصيغة نحصل على:

$$(2.5) \quad f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi_i)$$

فإذا أخذنا:

$$(2.6) \quad f'(x_i) \approx \frac{\nabla f(x_i)}{h}$$

فإن ذلك يؤدي إلى خطأ مقداره  $\frac{h}{2} f''(\xi_i)$ .

6.3 صيغ من المرتبة الثانية للمشتقة الأولى:

باستعمال متسلسلة تايلور، نحصل على:

$$(3.1) \quad f(x_{i-1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_i)$$

وأيضاً:

$$(3.2) \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\phi_i)$$

حيث  $\xi_i$  تقع في الفترة  $[x_i, x_{i+1}]$  و  $\phi_i$  تقع في الفترة  $[x_{i-1}, x_i]$ . بطرح (3.1) نحصل على:

$$(3.3) \quad f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{12} [f'''(\xi_i) + f'''(\phi_i)]$$

إذن بالإمكان الحصول على التقريب:

$$(3.4) \quad f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

بمجرد إذا كانت في الفترة  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

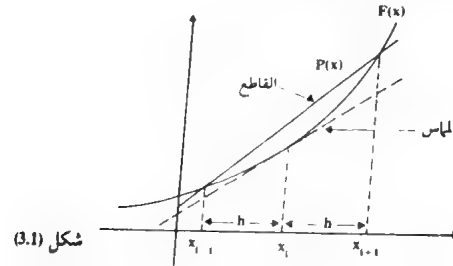
$$|f'''(x)| \leq k$$

فإن الخطأ في (3.4) يحقق:

$$|e| \leq \frac{kh^2}{6}$$

(3.5)

يسمى التقريب (3.4) بالتقريب بالفروق المركزية، وكما هو واضح من صيغة الخطأ، أنه تقريب من المرتبة الثانية. من الناحية الهندسية، فإن التقريب (3.4) يمثل تقريب ميل المماس بميل الخط الواصل بين النقطتين:  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ،  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  كما في الشكل (3.1).



شكل (3.1)

من جهة أخرى، إذا أخذنا متعددة الحدود من الدرجة الثانية المارة بالنقط الثلاث  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ،  $(x_i, f(x_i))$ ،  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  وهي:

$$(3.6) \quad p(x) = f(x_{i-1}) + \frac{\Delta f(x_{i-1})}{h} (x - x_{i-1}) + \frac{\Delta^2 f(x_{i-1})}{2h^2} (x - x_i)(x - x_{i-1})$$

وبالتالي فإن:

$$(3.7) \quad p'(x) = \frac{\Delta f(x_{i-1})}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_{i-1})}{2h^2} (2x - x_i - x_{i-1})$$

$$(3.8) \quad p'(x_i) = \frac{\Delta f(x_{i-1})}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_{i-1})}{2h} = \frac{1}{2h} [2f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))] = \frac{1}{2h} [f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})]$$

فإذا استعملنا التقريب:

$$f'(x_i) \approx p'(x_i)$$

فإننا نحصل على الصيغة (3.4) نفسها، وبالتالي يمكن اعتبار هذه الصيغة أنها نتيجة استكمال الدالة  $f(x)$  بمتعددة الحدود من الدرجة الثانية  $p(x)$  وأخذ  $p'(x_i)$  لتقدير  $f'(x_i)$ .

مثال (2.1):

استعمل «أ» الفروق المتقدمة من المرتبة الأولى.  
«ب» الفروق المتأخرة من المرتبة الأولى.  
وذلك لتقريب  $f'(1.5)$  حيث  $f(x) = x^3$  و  $h = 0.1$ . قارن بين الخطأ في التقريب والحد الأعلى لخطأ الصيغة.

$$f'(1.5) \approx \frac{f(1.6) - f(1.5)}{0.1} \quad (1)$$

$$= 7.21$$

القيمة الصحيحة للمشتقة الأولى هي:

$$f'(1.5) = 3(1.5)^2 = 6.75$$

إذن الخطأ هو:

$$e = 6.75 - 7.21 = -0.44$$

الحد الأعلى للخطأ يمكن الحصول عليه من:

$$|e| = \left| \frac{h}{2} f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} (6\xi) \leq (0.05) (6) (1.6)$$

$$|e| \leq 0.48$$

أي أن:

وهذه النتيجة تتفق مع الخطأ المتحصل عليه.

$$f'(1.5) \approx \frac{f(1.5) - f(1.4)}{0.1} \quad (1)$$

$$= 6.31$$

«ب»

الخطأ في هذا التقدير هو:

$$e = 6.75 - 6.31 = .44$$

والحد الأعلى نتحصل عليه من:

$$|e| \leq \left| \frac{h}{2} f''(\xi_i) \right| \leq (.05) (6) (1.5) = 0.45$$

وبالتالي فتقديرنا يتفق مع هذه النتيجة.

مثال (2.2):

استعمل الفروق المركزية للحصول على تقريب للتفاضل  $f'(1.5)$  حيث  $f(x) = x^3$  و  $h = 0.1$ ، قارن بين الخطأ في التقريب والصيغة (3.5).

باستعمال (3.4) نحصل على:

$$f'(1.5) = \frac{f(1.6) - f(1.4)}{0.2} = \frac{(1.6)^3 - (1.4)^3}{0.2} = 6.76$$

ومقارنة بالقيمة الصحيحة  $f'(1.5) = 6.75$

فإن مقدار الخطأ هو  $-0.01$ . وباستعمال (3.5) فإن الخطأ لا يزيد عن:

$$|e| \leq \frac{k(1)^2}{6}$$

$$k = |f'''(x)| = 6$$

حيث:

$$|e| \leq .01$$

أي أن:

وهو متفق مع الخطأ الذي تحصلنا عليه.

## تمارين (1)

1 - أوجد قياً تقريبية للتفاضل  $f'(2)$  حيث  $f(x) = x^2$ .

أ - باستعمال الفرق المتقدم من المرتبة الأولى.

ب - باستعمال الفرق المتأخر من المرتبة الأولى.

ج - باستعمال الفرق المركزي من المرتبة الأولى.

في كل الحالات اعتبر  $h = 0.2$  وقارن القيمة التقريبية بالقيمة الصحيحة.

2 - استعمل صيغ الحد الأعلى للخطأ في تمرين «1» وقارن بالخطأ الفعلي.

3 - إحصل على صيغ الخطأ في طرق الفرق المتقدم والمركزي باستعمال صيغة الخطأ في متعددة الحدود  $p(x)$  لاستكمال  $f(x)$ .

4 - باستعمال (3.7) بين أن الصيغة:

$$f'(x_i) \approx \frac{1}{h} \left[ \Delta f(x_i) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_i) \right]$$

هي من المرتبة الثانية. استعمل هذه الصيغة لتقدير  $f'(1)$  حيث  $f(x) = x^3$ ،  $h = .5$  وقارن بالقيمة الصحيحة.

5 - من تمرين «4» بين أن الصيغة:

$$f'(x_i) \approx \frac{1}{h} \left[ 2f(x_{i+1}) - \frac{3}{2} f(x_i) - \frac{1}{2} f(x_{i+2}) \right]$$

هي من المرتبة الثانية. استعمل هذه الصيغة لتقدير  $f'(1)$  حيث  $f(x) = x^3$ ،  $h = .5$  وقارن بالقيمة الصحيحة.

6 - باستعمال (3.7) اشتق الصيغة ذات المرتبة الثانية:

$$f'(x_i) \approx \frac{1}{2h} [f(x_{i-2}) + 3f(x_i) - 4f(x_{i+1})]$$

واستعمل هذه الصيغة لتقدير  $f'(1)$  كما في تمرين (5).

#### 6.4 صيغ للمشتقة الثانية

باستعمال متسلسلة تايلور فإن :

$$(4.1) \quad f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \frac{h^3}{3!} f'''_i + \frac{h^4}{4!} f^{iv}_i(\xi_i)$$

$$f_i = f(x_i), f'_i = f'(x_i), f''_i = f''(x_i), \dots$$

حيث :

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

وحيث :

أيضاً ، بالإمكان الحصول على المتسلسلة :

$$(4.2) \quad f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i - \frac{h^3}{3!} f'''_i + \frac{h^4}{4!} f^{iv}_i(\lambda_i)$$

بإضافة (4.1) ، (4.2) :

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f''_i + \frac{h^4}{4!} [f^{iv}_i(\xi_i) + f^{iv}_i(\lambda_i)]$$

إذن الصيغة :

$$(4.3) \quad f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} = \frac{\delta^2 f(x_i)}{h^2}$$

تعطي تقريباً للمشتقة الثانية بخطأ يتناسب مع  $h^2$  ، أي إذا كانت  $c$  مقداراً ثابتاً بحيث :

$$|f^{iv}(x)| \leq c$$

فإن الخطأ في (4.3) لا يتعدى :

$$(4.4)$$

$$|e| \leq \frac{c}{12} h^2$$

ومن جهة أخرى ، يمكن الحصول على الصيغة (4.3) من المشتقة الثانية لمتعددة الحدود  $p(x)$  التي تمر على النقط  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  ،  $(x_i, y_i)$  ،  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  ، ثم إيجاد  $p''(x_i)$  واعتبارها تقريباً للمشتقة  $f''(x_i)$ .

مثال (4.1) :

إذا كانت :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}, f(1) = 1, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16}$$

فأوجد قيمة تقريبية للمشتقة  $f'(1)$ .

$$f'(1) = \frac{81/16 - 2(1) + 1/16}{(1/2)^2} = 12.5$$

ملاحظة :

في هذا المثال ، تم اختيار قيم  $f$  بحيث تحقق :

$$f(x) = x^4$$

وبالتالي فإن :

$$f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$$

$$f'(1) = 12$$

وعلى ذلك فإن الخطأ في التقريب المتحصل عليه في المثال هو 0.5. وإذا طبقنا صيغة الخطأ (4.4) فإن :

$$f^{iv}(x) = 24$$

$$e = \frac{24}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

وهي القيمة التي تحصلنا عليها للخطأ.

مثال (4.2) :

أثبت أن الصيغة :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

ذات خطأ يتناسب مع  $h$ .

(4.4)

(4.4)

## نموذج امتحان شامل للجزء الأول

(الزمن: ساعتان)

س (1) : أوجد قيمة تقريبية للجذر الموجب للمعادلة:

$$2x^2 - 3 = 0$$

أ) بطريقتي التنصيف مبدئياً بالفترة [1,2] وحساب دورتين فقط.

ب) بطريقتي الوضع الخاطئ مبدئياً بالفترة [1,2] وحساب دورة واحدة.

ج) بطريقتي نيوتن مع أخذ  $x_0 = 2$  وحساب دورة واحدة.

د) اكتب برنامجاً لحساب 10 دورات بطريقتي نيوتن مبدئياً بالقيمة  $x_0 = 2$  لحل المعادلة في الفقرة أ).

س (2) : أ) احسب دورة واحدة لحل المعادلات التالية بطريقتي جاوس - سيدل ابتداءً من  $x = y = 0$ .

$$3x + y = 1$$

$$x + 2y = 2$$

ب) هل يتم التقارب نحو الحل في أ) عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟

س (3) : اكتب البرنامج الفرعي:

**SUBROUTINE ELEM 1 (A, B, N)**

الذي يقوم بالتعديلات اللازمة في المصفوفة المربعة A والمتجه B وذلك للتخلص من  $x_1$  في جميع المعادلات (ما عدا المعادلة الأولى) في النظام الخطي  $AX = B$  المتكون من N معادلة. افترض أن  $a_{11} \neq 0$ .

نستعمل متسلسلة تايلور للتعبير عن  $f(x_{i+1})$  و  $f(x_{i+2})$  كالآتي:

$$f_{i+2} = f_i + 2hf'_i + \frac{(2h)^2}{2!} \ddot{f}_i + \frac{(2h)^3}{3!} \ddot{\ddot{f}}_i + \dots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!} \ddot{f}_i + \frac{h^3}{3!} \ddot{\ddot{f}}_i + \dots$$

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + h^2 \ddot{f}_i + \ddot{\ddot{f}}_i h^3 + \dots \quad \text{إذن:}$$

$$\ddot{f}_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} - h \ddot{\ddot{f}}_i, \dots \quad \text{أي أن:}$$

وبالتالي فإن الصيغة (4.4) ذات خطأ يتناسب مع  $h$ ، أي من المرتبة الأولى.

## تمارين (2)

1 - أوجد قيمة تقريبية لكل من  $f'(1.1)$  و  $f'(1)$  إذا كانت

$$f(1) = 1, f(1.1) = \frac{10}{11}, f(1.2) = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = 1/x$$

قارن مع الدالة:

2 - إثبت أن الصيغة المتأخرة:

$$P(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

ذات خطأ يتناسب مع  $h$ .

3 - استعمل متسلسلة تايلور لإيجاد صيغة ذات خطأ يتناسب مع  $h^2$  لتقريب

$$f''(x_i) \text{ بدلالة } f(x_i) \text{ و } f(x_{i+1}) \text{ و } f(x_{i+2}) \text{ و } f(x_{i+3}).$$

4 - استعمل متسلسلة تايلور لإيجاد صيغة ذات خطأ يتناسب مع  $h^2$  لتقريب

$$f''(x_i) \text{ بدلالة } f(x_i) \text{ و } f(x_{i-1}) \text{ و } f(x_{i-2}) \text{ و } f(x_{i-3}).$$

مس (4) : استكمل قيمة  $f(1.6)$  في الجدول التالي باستعمال جميع القيم المتوفرة:

x	1.5	1.7	1.8
f(x)	6.9	8.1	9.6

مس (5) : إذا كانت  $|f'''(x)|$  لا تزيد عن 2 في الفترة  $[1.5, 1.8]$  فأوجد حداً أعلى للخطأ في تقدير  $f(1.6)$  في س (4).

مس (6) : «أ» أحسب قيمة تقريبية للتكامل  $\int_1^2 x^3 dx$  بطريقة سمسن وذلك باستعمال  $n = 2$  (حيث  $n$  هي عدد تقسيمات فترة التكامل).

«ب» ما هو الخطأ في التقريب المتحصل عليه في «أ»؟

مس (7) : إذا كان الخطأ في تقريب تكامل بطريقة سمسن مع تقسيم فترة التكامل إلى  $n$  فترة هو 0.0032 فقدر الخطأ عند استعمال  $2n$  من الفترات.

مس (8) : إذا كانت  $f(x) = \frac{1}{x}$  فأوجد قيمة تقريبية للمشتقة  $f'(1)$  باستعمال الفرق المركزي مع أخذ  $h = \Delta x = 0.1$ .

**الجزء الثاني**

## الحل العددي للمعادلات التفاضلية

### Numerical Solution of Differential Equations

#### 7.1 مقدمة

تختلف المعادلة التفاضلية عن المعادلة الجبرية في كونها تحتوي على بعض مشتقات الدالة، وتعتبر المعادلة من الدرجة الأولى إذا كانت أعلى مرتبة للمشتقة التي تحتوي عليها هي الدرجة الأولى. وبصورة عامة فإن مرتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة أعلى مشتقة في هذه المعادلة. والصورة العامة لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى هي:

$$(1.1) \quad f(x, y, y') = 0$$

حيث  $f$  دالة في ثلاثة متغيرات  $x, y, y'$ . وبنفس الطريقة، فإن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هي:

$$(1.2) \quad f(x, y, y', y'') = 0$$

مثال (1.1):

$$y' + y - x^2 = 0$$

المعادلة:

هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى. والمعادلة:

$$2y'' + 3y' + xy - e^x = 0$$



## 7.2 طريقة أولر Euler's Method

باستعمال متسلسلة تايلور، نحصل على:

$$(2.1) \quad y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

حيث تقع  $\xi$  في الفترة  $[x, x+h]$ . إذا كانت  $h$  مقداراً صغيراً فبالإمكان استعمال التقريب:

$$(2.2) \quad y(x+h) \approx y(x) + h y'(x)$$

ويحتوي هذا التقريب على خطأ مقداره:

$$e_i = \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

ويعرف هذا الخطأ بخطأ الصيغة الموضعي (local truncation error) ويسمى التقريب (2.2) بطريقة أولر. لتوضيح هذه الطريقة ندرس المثال التالي:

مثال (2.1):

استعمل طريقة أولر لحساب  $y$  عند

$$x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$$

وذلك بأخذ قيمة:

$$h = 0.1$$

في حل المسألة:

$$y' = x + y$$

$$y(0) = 1$$

نلاحظ هنا من الشرط الابتدائي أن:  $x_0 = 0$   
 $y_0 = 1$

هي معادلة من المرتبة الثانية.

إن بعض المعادلات التفاضلية سهلة الحل، فمثلاً المعادلة:

$$y' - y = 0$$

$$y = ce^x$$

تمتلك الحل:

حيث  $c$  مقدار ثابت. ويمكن تحقيق هذا الحل وذلك بإيجاد  $y'$  وطرح هذه المشتقة من  $y$  للحصول على صفر. لاحظ أن هذا الحل العام يعبر عن ما لا نهاية من الحلول بناءً على القيمة التي نختارها للثابت  $c$ . ولكن إذا اشترطنا أن يحقق الحل ما يسمى بالشرط الابتدائي وهو:

$$y(x_0) = y_0$$

يصبح الحل محدداً. فمثلاً إذا اشترطنا أن:

$$y(0) = 1$$

فإن حل المعادلة  $y' - y = 0$  هو:

$$y(x) = e^x$$

وتسمى مسألة إيجاد حل معادلة تفاضلية مع شرط ابتدائي بمسألة القيمة الابتدائية (Initial-value problem). لإيجاد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية، نقوم بحساب قيمة  $y$  عند نقط عديدة للمتغير  $x$  ولتكن:

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

$$y_0, y_1, y_2, \dots$$

حيث النقطة  $(x_0, y_0)$  هي الشرط الابتدائي وبالتالي فهي نقطة معلومة. أما القيم  $x_i$  فتكون عادة على أبعاد متساوية بمسافة  $h$  بينها، وبالتالي فإن:

$$x_i = x_0 + ih$$

وبالتالي فإن:

$$y_1 = y(0.1) = y(0) + (0.1) y'(0)$$

$$= 1 + (0.1) (0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y(0.2) = y(0.1) + (0.1) y'(0.1)$$

$$= 1.1 + (0.1) (0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y(0.3) = y(0.2) + (0.1) (0.2 + 1.22) = 1.362$$

$$y_4 = y(0.4) = y(0.3) + (0.1) (0.3 + 1.362) = 1.5282$$

ملاحظة:

الحل الصحيح للمسألة في المثال السابق هو:

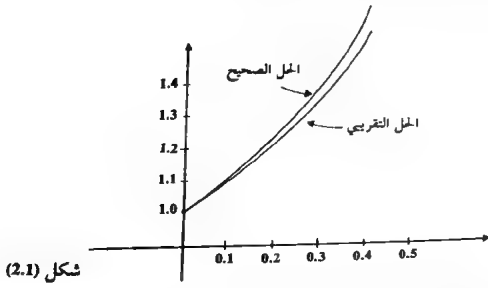
(2.3)

$$y(x) = 2e^x - (x + 1)$$

ويمكن التحقق من ذلك بالتعويض في المعادلة والشرط الابتدائي. وبالتالي يمكن المقارنة بين هذا الحل الصحيح والحل التقريبي الذي حصلنا عليه بطريقة أويلر وحساب الخطأ في الجدول التالي:

x	الحل التقريبي	الحل الصحيح	الخطأ
0	1	1	0
0.1	1.1	1.11	0.01
0.2	1.22	1.243	0.023
0.3	1.362	1.400	0.038
0.4	1.5282	1.5836	0.0554

لاحظ أن الحل الصحيح في هذا الجدول به تقريب. بما يكفي لغرض المقارنة. لاحظ أيضاً أن الخطأ يزداد كلما زادت x، أي كلما ابتعدنا عن نقطة البداية، كما يتضح ذلك من الرسم (شكل 2.1).



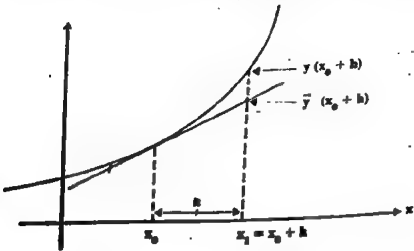
شكل (2.1)

من الناحية الهندسية، فإن قيمة المشتقة الأولى عند نقطة تساوي ميل المماس عند هذه النقطة. أي:

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}$$

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + hy'(x_0)$$

وبالتالي فإن: وهذا يعني أن طريقة أويلر تقرب النقطة  $y(x_0+h)$  بالقيمة  $\bar{y}(x_0+h)$  الواقعة على المماس كما هو مبين بالرسم (شكل 2.2).



شكل (2.2)

2 - استعمل طريقة أولر لحساب  $y_1, y_2, y_3$  (بأخذ قيمة  $h = 0.05$ ) في المعادلتين الأولى والثانية من تمرين 1 وقارن الحل التقريبي مع الحل الصحيح . استخدم 6 خانات عشرية في الحساب .

3 - بين أن طريقة أولر تكافئ استبدال  $y'$  بالفرق المقسوم :

$$y'_i \approx (y_{i+1} - y_i) / h$$

4 - ما قيمة خطأ الصيغة الموضعي عند حل المعادلة :  $y' = 2x + 1$

بطريقة أولر باستخدام  $h = 0.1$  ؟

5 - بين بالرسم موقعي  $y_1, y_2$  المتحصل عليهما بطريقة أولر لحل مسألة القيمة الابتدائية :

$$y = 2x, y(0) = 0$$

مع أخذ  $h = 0.5$  . قارن على الرسم بالقيمة الصحيحة .

6 - إذا كانت  $y_i$  هي القيم المتحصل عليها بطريقة أولر لحل المسألة :

$$y' = -100y, y(0) = 1$$

$$y_i = (1 - 100h)^i$$

بين أن :

وأوجد قيمة الخطأ عندما :

$$x = 1, h = 0.1$$

ماذا تلاحظ عن هذا الخطأ؟

7 - اكتب برنامجاً رئيسياً لحساب  $y$  من  $x = 0$  إلى  $x = 1$  بطريقة أولر مستعملًا  $h = 0.01$  وذلك كحل للمسألة :

$$y' = x - y^2, y(0) = 1$$

مثال (2) :

البرنامج الفرعي التالي يحسب :  $Y(2), Y(3), \dots, Y(N)$

وذلك بحل المعادلة التفاضلية :  $Y' = F(X, Y)$

مع الشرط الابتدائي بأن :

$$Y = Y(1)$$

$$X = X(1)$$

عند  
علماً بأن طول الخطوة  $H$  هو من المعطيات وأن  $N - 1$  يساوي عدد الخطوات حيث  $N$  هي من المعطيات أيضاً.

```
SUBROUTINE EULER (X, Y, N, H, F)
DIMENSION X(N), Y(N)
DO 10 I = 2, N
Y(I) = Y(I - 1) + H * F(X(I - 1), Y(I - 1))
X(I) = X(I - 1) + H
CONTINUE
RETURN
END
```

10

## تمارين (1)

1 - حقق الحل المبين أمام كل معادلة من المعادلات التفاضلية الآتية وشرطها الابتدائي .

المعادلة	الشرط الابتدائي	الحل
$y' = -y^2$	$y(1) = 1$	$y = 1/x$
$y' = y + 2xe^x$	$y(0) = 0$	$y = x^2 e^x$
$y'' = 2\cos x - y$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$	$y = x \sin x$

### 7.3 طريقة متسلسلة تايلور

للحصول على دقة أكثر من طريقة أويلر، بالإمكان استعمال حدود أكثر في متسلسلة تايلور، وذلك على النحو:

(3.1)

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i)$$

فمثلاً: إذا استعملنا 3 حدود من هذه المتسلسلة، فإننا نحصل على:

(3.2)

$$y_{i+1} \approx y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i$$

حيث كالعادة:

$$y_i = y(x_i), \dots, y'_i = y'(x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

وتعرف الصيغة (3.2) أحياناً باسم طريقة أويلر الموسعة (Extended Euler Method)، والخطأ الموضعي في هذه الصيغة هو:

(3.3)

$$e_i = \frac{h^3}{3!} y'''(\xi_i) \quad x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

لاحظ أنه لحل المعادلة التفاضلية:

(3.4)

$$y' = f(x, y)$$

يمكن الحصول على  $y''$  من الصيغة التالية:

(3.5)

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

مثال (3.1):

احسب قيم تقريبية لـ  $y$  عندما

$$x = 0.1, 0.2, 0.3$$

من المعادلة التفاضلية:

$$y' = x + y$$

$$y(0) = 1$$

مستعملاً 3 حدود من متسلسلة تايلور.

بما أن  $y' = x + y$  فبالتفاضل نحصل على:

$$y'' = 1 + y' = 1 + x + y$$

وبتطبيق الصيغة (3.2) نحصل على:

$$y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) + .005(1 + 0 + 1)$$

$$= 1.11$$

$$y_2 = 1.11 + .1(1 + 1.11) + .005(1 + .1 + 1.11)$$

$$= 1.24205$$

$$y_3 = 1.24205 + .1(.2 + 1.24205) + .005(1 + .2 + 1.24205)$$

$$= 1.398465$$

ملاحظة:

بالإمكان مقارنة الخطأ الناتج من استعمال 3 حدود في متسلسلة تايلور بالخطأ الناتج من استعمال طريقة أويلر وذلك من الحل الصحيح (2.3) كما في الجدول التالي:

#### 7.4 الخطأ الكلي والتقارب في طريقة أويلر

يسمى الخطأ الناتج من تراكم الأخطاء الموضعية من النقطة الابتدائية إلى أي نقطة بالخطأ الكلي. وبالتالي فإن الخطأ الكلي  $e_i$  هو الفرق بين الحل الصحيح  $Y_i$  والحل التقريبي  $y_i$  في نقطة ما  $x_i$ ، أي أن:

$$e_i = Y_i - y_i$$

هذا الخطأ يعتمد على مقدار  $h$  (أي طول الخطوة). ولإيجاد العلاقة بين  $h$  و  $e_n$  نلاحظ أن طريقة أويلر هي العلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h y'_n \quad (4.1)$$

ومن متسلسلة تايلور نجد أن:

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(x_n, Y_n) + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n) \quad (4.2)$$

$$f(x_n, Y_n) = f(x_n, y_n) + (Y_n - y_n) \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta_n) \quad (4.3)$$

حيث  $\xi_n$  تقع بين  $x_n$  و  $x_{n+1}$  وأما  $\eta_n$  فتقع بين  $y_n$  و  $Y_n$ . والآن بطرح (4.1) من (4.2) نجد أن:

$$Y_{n+1} - y_{n+1} = (Y_n - y_n) + h [f(x_n, Y_n) - f(x_n, y_n)] + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

ومن (4.3) نحصل على:

$$e_{n+1} = e_n \left[ 1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta_n) \right] + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

بملاحظة أن  $e_0 = 0$  وحساب  $e_1, e_2, \dots$  من هذه المعادلة نجد أن:

$$e_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} Y''(\xi_i) h^2 + O(h^3) \quad (4.4)$$

فإذا كان  $K$  بحيث أن:  $|Y''(x)| < 2K$

x	الحل الصحيح	خطأ أويلر	خطأ تايلور
.1	1.11034	0.01034	0.00034
.2	1.2428	0.02280	0.00060
.3	1.39972	0.03377	0.00125

#### تمارين (2)

1 - لتكن:  $y' = f(x, y), y'' = g(x, y)$

حيث  $f, g$  دالتان معلومتان (معرفتان في برامج فرعية) اكتب البرنامج الفرعي الذي يحسب:

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

من مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x, y)$$

$$y_0 = y(x_0)$$

وذلك باستعمال 3 حدود من متسلسلة تايلور.

2 - أحسب  $y_1, y_2, y_3$  باستعمال متسلسلة تايلور من 3 حدود، حيث:

$$y' = 2y + 1, y(0) = 0$$

افترض  $h = 0.1$ .

3 - ما هو الخطأ الموضعي الناتج من حل المعادلة:

$$y' = 2x^3 + 1$$

بطريقة تايلور بثلاثة حدود.

4 - أوجد قيمة تقريبية للجذر  $\sqrt{2}$  وذلك بحل المعادلة:

$$y' = 1/(2y), y(0) = 1$$

رياضياً وعددياً بطريقة أويلر الموسعة. افترض أن  $h = 0.5$

### 7.5 مسألة الاستقرار (Stability Problem)

لدراسة مسألة استقرار الطرق العددية في حل المعادلات التفاضلية، ندرس المسألة التالية:

$$(5.1) \quad Y' = -\lambda Y, Y(0) = y_0, \lambda > 0$$

التي تمتلك الحل الوحيد:

$$(5.2) \quad Y = y_0 e^{-\lambda x}$$

وبالتالي فإن:

$$(5.3) \quad Y \rightarrow 0 \text{ عندما } x \rightarrow \infty$$

وإذا استعملنا طريقة أويلر لحل المسألة (5.1) نحصل على:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = (1 - \lambda h) y_i$$

أي أن:

$$y_1 = (1 - \lambda h) y_0$$

$$y_2 = (1 - \lambda h) y_1 = (1 - \lambda h)^2 y_0$$

$$(5.4) \quad y_n = (1 - \lambda h)^n y_0$$

بالمقارنة بين الحل التقريبي  $y_n$  والحل الصحيح  $Y$ ، فإن  $y_n$  يجب أن تزول إلى الصفر عندما تسمى  $n$  إلى ما لا نهاية. وهذا لا يحدث إلا عندما:

$$(5.5) \quad |1 - \lambda h| < 1$$

$$\text{أي عندما: } 0 < \lambda h < 2$$

لجميع قيم  $x$  في الفترة  $[x_0, x_n]$  فإن:

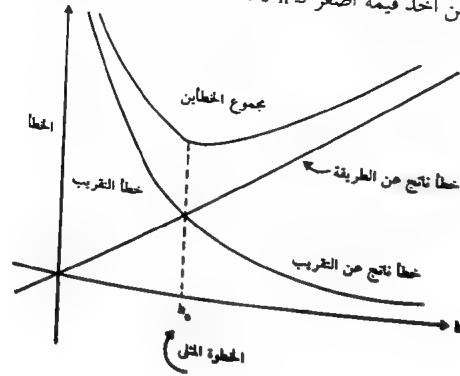
$$e_n \leq K n h^2 = K (x_n - x_0) h$$

وبالتالي فإن الخطأ الكلي في طريقة أويلر يتناسب طردياً مع طول الخطوة  $h$  وبذلك يزول الخطأ إلى الصفر عندما تسمى  $h$  نحو الصفر، أي:

$$e_n \rightarrow 0 \iff h \rightarrow 0$$

وهذه هي خاصية التقارب (Convergence) في حل المعادلات التفاضلية بالطرق العددية.

من الناحية العملية، نحتاج إلى تقريب الأعداد نظراً لعدم إمكانية استعمال أعداد ذات خانات عديدة تفوق قدرة الجهاز في تمثيلها. وهذا ما يسبب خطأ التقريب (ويسمى أحياناً خطأ التدوير) Roundoff error. وكلما صغرت  $h$  زاد هذا الخطأ نظراً لازدياد عدد العمليات الحسابية وبالتالي عمليات التقريب. والشكل (4.1) يوضح أن هناك نقطة مثل  $h_0$  يكون عندها الخطأ أصغر ما يمكن، ولا يمكن أخذ قيمة أصغر لـ  $h$  لأن خطأ التقريب سيزداد بصورة كبيرة.



## 7.6 الطرق الضمنية Implicit Methods

نعرف من المبرهنات الأساسية في التفاضل والتكامل أن:

$$(6.1) \quad y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx$$

وبالتالي، فبالإمكان الحصول على صيغ لحل المعادلات التفاضلية باستعمال إحدى الطرق التقريبية في التكامل. فمثلاً إذا استعملنا التقريب:

$$(6.2) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx \approx hy'_i(x_i)$$

نحصل على طريقة أولر من (6.1), (6.2):

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i$$

أما إذا استعملنا التقريب:

$$(6.3) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx \approx hy'_{i+1}(x_{i+1})$$

نتحصل بالتعويض في (6.1) على الطريقة:

$$(6.4) \quad y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1}$$

وتعرف عادة «بطريقة الفرق المتأخر» حيث إنها تستعمل التقريب:

$$(6.5) \quad y'_{i+1} \approx (y_{i+1} - y_i)/h$$

وهو تقريب الفرق المتأخر.

أما إذا استعملنا قاعدة شبه المنحرف:

$$(6.6) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx \approx \frac{h}{2} [y'_i + y'_{i+1}]$$

فإننا نحصل على:

$$(6.7) \quad y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2} [y'_i + y'_{i+1}]$$

يعرف هذا الشرط بشرط الاستقرار لطريقة أولر. لاحظ من (5.4) أن في حالة عدم تحقق هذا الشرط فإن الخطأ (عندما  $x$  تسعى إلى ما لا نهاية) لا يؤول إلى الصفر. لاحظ أن هذه النتيجة تنطبق فقط على المعادلة (5.1) التي تعرف بمعادلة الاختيار حيث نختار بها ما إذا كانت الطريقة العددية لحل المعادلات التفاضلية مستقرة (Stable) أو غير مستقرة (unstable) أو مشروطة الاستقرار (Conditionally Stable). وعلى ذلك، فإن طريقة أولر تعتبر مشروطة الاستقرار، والشرط هو (5.5).

## تمارين (3)

- 1 - أثبت أن الخطأ الكلي في طريقة تايلور بثلاثة حدود يتناسب مع  $h^2$ .
- 2 - أوجد شرط الاستقرار في طريقة تايلور بثلاثة حدود.
- 3 - إذا كانت قيمة  $y_0$  الابتدائية ذات خطأ مقداره  $e_0$ ، فبين أن الخطأ الكلي في  $y_n$  (عند حل معادلة الاختيار بطريقة أولر) هو:  

$$e_n = [1 - \lambda h] e_{n-1} + \frac{h^2 \lambda^2}{2} y''(\xi_n) \quad x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$$
وبالتالي أوجد الشرط على  $\lambda h$  حتى يؤول  $e_n$  إلى الصفر عندما  $n \rightarrow \infty$ .
- 4 - في حل المعادلة  $y' = -20y$  مع  $y(0) = \frac{1}{3}$  استعملت طريقة أولر لحساب  $y$  عندما  $x = 1$ ، احسب الخطأ الناتج عنه عند النقطة الأخيرة:

أ) عندما  $h = 0.05$

ب) عندما  $h = 0.2$

والتي إذا استخدمناها في حل المعادلة :

$$y' = f(x, y)$$

تصبح كالآتي :

$$(6.8) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

توصف الطريقتان (6.4) و (6.7) بأنهما من الطرق الضمنية لأن  $y_{i+1}$  موجودة ضمن متغيرات الدالة  $f$ ، وهو ما يجعل حساب  $y_{i+1}$  متعذراً في أغلب الأحيان. ومع ذلك، فإن هذه الطرق تستعمل أحياناً نظراً لمزايا الاستقرار التي تتمتع بها.

مثال (6.1) :

بين أن طريقي الفرق المتأخر وشبه المنحرف مستقرتان (بدون شرط).

نطبق الطريقة الأولى على معادلة الاختبار :

$$y' = f(x, y) = -\lambda y$$

لنحصل على :

$$y_{i+1} = y_i - \lambda h y_{i+1}$$

أي :

$$(1 + \lambda h) y_{i+1} = y_i$$

أو :

$$y_1 = \frac{y_0}{1 + \lambda h}$$

و :

$$y_2 = \frac{y_1}{1 + \lambda h} = \frac{y_0}{(1 + \lambda h)^2}$$

$$y_n = \frac{y_0}{(1 + \lambda h)^n} \quad \text{وبصورة عامة :}$$

ونظراً لأن  $\lambda > 0$  و  $h > 0$  فإن  $1 + \lambda h > 1$  وبالتالي فإن  $y_n$  تؤول إلى الصفر عندما تسمى  $n$  إلى ما لا نهاية، وهذا يعني أن الطريقة مستقرة بدون شرط.

وبطريقة مماثلة فإن تطبيق (6.8) على معادلة الاختبار يؤدي إلى :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

$$= y_i - \frac{\lambda h}{2} [y_i + y_{i+1}]$$

$$\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y_{i+1} = \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y_i \quad \text{أي أن :}$$

ومنها نستنتج أن :

$$y_n = \left(\frac{2 - \lambda h}{2 + \lambda h}\right)^n y_0$$

وشرط الاستقرار بأن  $y_n$  تؤول إلى الصفر عندما تسمى  $n$  إلى ما لا نهاية يتحقق في هذه الحالة عندما :

$$-1 < \frac{2 - \lambda h}{2 + \lambda h} < 1$$

وهذا الشرط يتحقق طالما إن  $\lambda h > 0$ . وبالتالي فإن طريقة شبه المنحرف مستقرة بدون شرط.

### 7.7 طريقة أويلر المعدلة Modified Euler's Method

تتطلب المعادلة (6.8) حلاً للمجهول  $y_{i+1}$ ، وهذا الحل ليس سهلاً إذا كانت  $f$  غير خطية في  $y$  ولذلك نلتجئ إلى الحل التكراري باستعمال طريقة التقطة الثابتة :

$$(7.1) \quad y_{i+1}^{(n+1)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(n)})]$$



$$y(x) = xe^x$$

الحل الصحيح للمسألة في مثال (7.1) هو:

ومن ذلك، نحسب الخطأ في  $y_1, y_2$ ، أي:

$$e(1) = (1) e^{-1} - .11025 = .00027$$

$$e(2) = (2) e^{-2} - .24368 = .00060$$

مثال (7.2):

أحسب  $y_1$  و  $y_2$  في المثال السابق بطريقة شبه المنحرف وقارن الخطأ بطريقة أولر المعدلة.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)]$$

$$= y_0 + \frac{h}{2} (y_0 + e^{x_0}) + \frac{h}{2} (y_1 + e^{x_1})$$

نقل  $y_1$  إلى الطرف الأيسر، نحصل على:

$$\left(1 - \frac{h}{2}\right) y_1 = \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_0 + \frac{h}{2} (e^{x_0} + e^{x_1})$$

$$y_1 = \frac{1 + h/2}{1 - h/2} y_0 + \frac{h/2}{1 - h/2} (e^{x_0} + e^{x_1})$$

$$y_1 = .11070$$

$$y_2 = .24467$$

وبعد التعويض نحصل على:

وبالطريقة نفسها:

والخطأ في هذه الحالة هو:

$$e(1) = (1) e^{-1} - .11070 = -.00018$$

$$e(2) = (2) e^{-2} - .24467 = -.00039$$

حيث يرمز  $(k)$  إلى الدورة  $k$ . لاحظ أن هذه الصيغة تحتاج إلى قيمة ابتدائية  $y_{i+1}^{(0)}$  ويمكن الحصول عليها مثلاً من طريقة أولر، أي:

$$(7.2) \quad y_{i+1}^{(0)} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

إذا تم استعمال دورة واحدة فقط في الصيغة (7.1) فإن (7.1) مع (7.2) تسمى بطريقة أولر المعدلة. أي أن هذه الطريقة تتكون من خطوتين هما:

$$(7.3) \quad p_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_{i+1} + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, p_{i+1})]$$

حيث تم استعمال  $p_{i+1}$  بدلاً من  $y_{i+1}^{(0)}$  لتسهيل الكتابة. تسمى الخطوة الأولى من (7.3) التنبؤ والخطوة الثانية بصيغة التصحيح، ولذلك توصف طريقة أولر المعدلة بأنها من طرق التنبؤ والتصحيح (predicator-corrector).

مثال (7.1):

استعمل طريقة أولر المعدلة لحساب  $y_1$  و  $y_2$  علماً بأن:

$$y' = y + e^x, y(0) = 0, h = .1$$

$$f(x, y) = y + e^x$$

في هذه الحالة:

$$p_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 0.1$$

وبالتالي

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(0,0) + f(.1, .1)] = 0.11025$$

$$p_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 0.23179$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, p_2)] = 0.24368$$

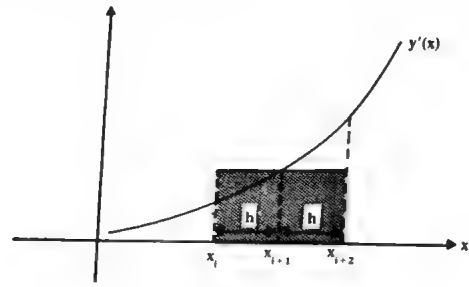
ونلاحظ أن الخطأ هنا أقل من المتحصل عليه بطريقة أولر المعدلة، وهذا متوقع حيث إن هذه الطريقة هي حالة خاصة من طريقة شبه المنحرف.

### 7.8 طريقة نقطة المنتصف Mid-Point Method

التقريب التالي:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} y'(x) dx \approx 2hy_{i+1} \quad (8.1)$$

يسمى بتقريب نقطة المنتصف حيث يتم تقريب المساحة تحت المنحنى  $y'(x)$  من  $x_i$  إلى  $x_{i+2}$  بمساحة المستطيل المبين بالشكل التالي:



بتطبيق (8.1) في حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x, y)$$

نحصل على الصيغة:

(8.2)

$$y_{i+2} = y_i + 2h f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

وتعرف هذه الطريقة بطريقة نقطة المنتصف. تختلف هذه الطريقة عن الطرق التي سبق لنا دراستها حتى الآن من حيث إن حساب  $y_2$  يتطلب معرفة  $y_1$ .

ولذلك تعرف مثل هذه الطريقة بطريقة الخطوتين two-step method. ويعني هذا أنه يجب الحصول على  $y_1$  بطريقة أخرى مثل طريقة أولر، ثم نستخدم طريقة نقطة المنتصف للحصول على بقية القيم  $y_i$ .

مثال (8.1):

استعمل طريقة نقطة المنتصف لحساب  $y(2)$  علماً بأن:

$$y(0) = 0, y(1) = .1105$$

$$y' = y + \exp(x)$$

باستعمال طريقة نقطة المنتصف (8.2) نحصل على:

$$y_2 = y_0 + 2(.1) f(.1, .1105)$$

$$= 2(.1) (.1105 + e^{.1}) = .24313$$

نلاحظ هنا أن حل هذه المسألة الصحيح هو:

$$y(2) = (.2) e^{-2} = .24428$$

أي أن الخطأ المطلق هو 0.00115.

مثال (8.2):

ما هي مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة نقطة المنتصف

لإيجاد الخطأ نستعمل متسلسلة تايلور:

$$\begin{aligned} y_{i+2} &= y_i + 2h y'_i + \frac{(2h)^2}{2!} y''_i + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_i + \dots \\ &= y_i + 2h y'_i + 2h^2 y''_i + \frac{4}{3} 2h^3 y'''_i + \dots \end{aligned}$$

وأيضاً:

$$r^2 + 2\lambda hr - 1 = 0 \quad \text{باختصار } r^i \text{ نحصل على المعادلة:}$$

التي جذراها هما:

$$r_1 = -\lambda h + \sqrt{\lambda^2 h^2 + 1}$$

$$r_2 = -\lambda h - \sqrt{\lambda^2 h^2 + 1}$$

لاحظ هنا أن:  $|r_2| > 1$

لجميع قيم  $\lambda h$  الموجبة، وبالتالي فإن:

$$y_i = c_1 r_1^i + c_2 r_2^i$$

سيبقى نحوها لا نهاية مع تذبذب بين السالب والموجب عندما تزداد قيمة  $i$  لأن  $r_2 > 1$ . وبالتالي فإن طريقة نقطة المنتصف غير مستقرة على الإطلاق.

ملاحظة:

لاختيار تأثير عدم الاستقرار على النتائج المتحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف، نكتب برنامجاً للحصول على حل للمعادلة  $y' = -y$ ،  $y(0) = 1$  من  $x = 0$  إلى  $x = 10$  بخطوة مقدارها  $h$  حيث  $h = 0.1$ . والجدول التالي يبين هذه النتائج.

$x_i$	$y_i$	$e^{-x_i}$
1.0	0.36686655	0.3678795
2.0	0.136325	0.1353353
3.0	0.05152451	0.04978707
4.0	0.02248718	0.01831564
5.0	0.01778869	0.006737947
6.0	0.0322369	0.00248752
7.0	0.08188403	0.00091188
8.0	0.2200514	0.00033546
9.0	0.5963729	0.000123409
10.0	1.6181290	.0000454

$$y'_{i+1} = y'_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \dots$$

إذن:

$$y_{i+2} = y_i + 2h \left[ y'_{i+1} - hy'_i - \frac{h^2}{2} y''_i - \dots \right] + 2h^2 y'_i + \frac{4h^2}{3} y''_i + \dots$$

$$= y_i + 2h y'_{i+1} + \left[ \frac{4}{3} - 1 \right] h^3 y''_i + \dots$$

بالمقارنة مع صيغة نقطة المنتصف نجد أن الخطأ الموضعي من المرتبة الثالثة  $O(h^3)$ ، وهي مرتبة جيدة إذا قورنت مثلاً بطريقة أويلر. ولكن مشكلة طريقة نقطة المنتصف هي عدم استقرارها، كما يوضح المثال التالي:

مثال (8.3):

ناقش مسألة الاستقرار لطريقة نقطة المنتصف.

بتطبيق هذه الطريقة على معادلة الاختبار:

$$y' = -\lambda y, \lambda > 0$$

نحصل على:

$$y_{i+2} = y_i - 2\lambda h y_{i+1}$$

يمكن الحصول على حل لهذه المعادلة (وهي نوع من معادلات الفروق) بافتراض حل على الشكل:

$$y_i = r^i$$

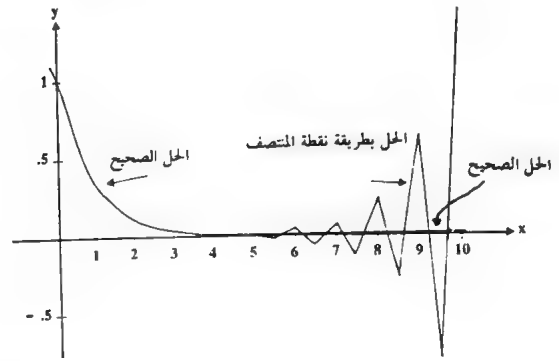
وبالتالي فإن:

$$y_{i+1} = r^{i+1}, y_{i+2} = r^{i+2}$$

إذن:

$$r^{i+2} = r^i - 2\lambda h r^{i+1}$$

لاحظ هنا أن الحل العددي  $y_i$  يتناقص عندما  $x < 6$  ولكنه يبدأ في التزايد عند  $x \approx 6$ ، بينما الحل الصحيح يستمر في التناقص، والشكل (8.1) يبين ذلك.



الشكل (8.1)

## 7.9 الصيغة العامة للطرق العددية

يمكن وضع الطرق العددية المستعملة في حل المعادلات التفاضلية على

الصورة:

$$(9.1) \quad y_{i+k} = \phi(x_i, y_i, \dots, x_{i+k}, y_{i+k})$$

حيث  $k$  هو عدد الخطوات. فمثلاً في طريقة أويلر ( $k=1$ ) و

$$(9.2) \quad \phi(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + hf(x_i, y_i)$$

وفي طريقة شبه المنحرف ( $k=1$ ) و

$$\phi(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

أما في طريقة نقطة المتصف فإن  $k=2$  و

$$\phi(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + 2h f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

نلاحظ أيضاً أن الصورة العامة للدالة  $\phi$  هي:

$$(9.3) \quad \phi(x_i, y_i, \dots, x_{i+k}, y_{i+k}) = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i+1} + \dots + \alpha_{k-1} y_{i+k-1} \\ + \beta_0 hf(x_i, y_i) + \beta_1 hf(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ + \dots + \beta_k hf(x_{i+k}, y_{i+k})$$

أي أنه في طريقة أويلر  $\beta_0 = 1, \alpha_0 = 1$  وبقيّة المعاملات أصفار، أما في طريقة نقطة المتصف حيث  $k=2$  فإن  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 0, \beta_1 = 2, \beta_2 = 0$ .

كما يلاحظ أن الطريقة (9.1) تعتبر ضمنية Implicit إذا كانت  $\beta_k \neq 0$  وتعتبر طريقة صريحة (Explicit) عندما يكون هذا المعامل صفراً.

إذا طبقنا الطريقة العامة (9.1) على معادلة اختياري الاستقرار:

$$y' = -\lambda y, \lambda > 0$$

نحصل على:

$$(9.4) \quad y_{i+k} = (\alpha_0 - \lambda h \beta_0) y_i + (\alpha_1 - \lambda h \beta_1) y_{i+1} + \dots \\ + (\alpha_{k-1} - \lambda h \beta_{k-1}) y_{i+k-1} - \lambda h \beta_k y_{i+k}$$

للحصول على حل لمعادلة الفروق (9.4) في الصورة:

$$(9.5) \quad y_i = r^i$$

نعوض هذه الصيغة في (9.4)، لنحصل على المعادلة:

$$(9.6) \quad p(r) = (\lambda h \beta_0 - \alpha_0) + \dots + (\lambda h \beta_{k-1} - \alpha_{k-1}) r^{k-1} \\ + (1 + \lambda h \beta_k) r^k = 0$$

وهي معادلة متعددة الحدود من الدرجة  $k$  وبالتالي لها عدد  $k$  من الجذور هي:  $r_1, r_2, \dots, r_k$ .

تسمى (9.6) بمتعددة الحدود الذاتية. فمثلاً في طريقة أويلر ( $k=1, \beta_0 = 1$ )

$\beta_1 = 0, \alpha_0 = 1$  نحصل على متعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(r) = r + (\lambda h - 1) = 0$$

التي تمتلك الحل الوحيد:

$$r_1 = 1 - \lambda h$$

وكمثال آخر فإن  $p(r)$  لطريقة نقطة المنتصف يمكن الحصول عليها

$$\beta_0 = \beta_2 = 0, \beta_1 = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_0 = 1, k = 2$$

$$p(r) = r^2 + 2\lambda h r - 1$$

من تعريف الاستقرار، يمكن استنتاج أن أي صيغة عددية لحل المعادلات التفاضلية تعتبر مستقرة إذا كانت متعددة الحدود  $p(r)$  الخاصة بها تمتلك جذوراً  $r_i$  بحيث:

$$|r_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (9.7)$$

لاحظ أن الجذور  $r_i$  تعتمد على  $\sigma$  حيث:

$$\sigma = \lambda h$$

ولذلك يجب أن تكون قيمة  $\sigma$  صغيرة بما يكفي لتحقيق (9.7) حتى تكون الصيغة المستعملة مستقرة.

#### تمارين (4)

1 - استعمل متسلسلة تايلور لإيجاد مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة «أ» الفرق الخلفي «ب» شبه المنحرف «ج» طريقة أويلر المعدلة.

2 - استعمل «أ» طريقة الفرق المتأخر «ب» طريقة شبه المنحرف «ج» طريقة أويلر المعدلة، لحساب  $y_1, y_2$  بأخذ  $h = 0.5$ ، وحل المسألة:

$$y' + xy = x^3 + 2x$$

$$y(0) = 0$$

لاحظ أن الحل هو:  $y = x^2$

قارن بين الحلول العددية مع التعليق.

3 - أكتب برنامجاً لحساب  $y$  عند النقاط:

$$x = 0.1, 0.2, \dots, 1$$

وذلك بطريقة أويلر المعدلة لحل المعادلة:

$$y' = y^2 + 1$$

$$y(0) = 0$$

4 - حل المعادلة في تمرين (3) بطريقة نقطة المنتصف. لاحظ أن الحل الصحيح هو:

$$y = \tan(x)$$

لذلك فبالإمكان أخذ:  $y_1 = \tan(0.1)$

قارن بين الحل العددي والحل التحليلي (الصحيح).

5 - أكتب البرنامج في تمرين (3) بطريقة نقطة المنتصف بدلاً من طريقة أويلر المعدلة مع افتراض  $y_1 = \tan(0.1)$ .

6 - بالإمكان التعديل في طريقة نقطة المنتصف حتى تصبح أكثر استقراراً وذلك على النحو التالي:

$$p_i = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, p_i)$$

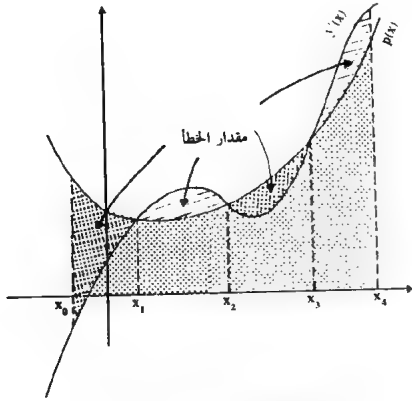
طبق هذه الطريقة لحل المعادلة:  $y' = -2y, y(0) = 1$

مستعملاً:  $i = 0, 1, 2$

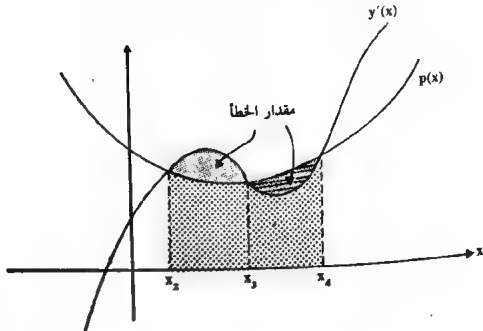
$$h = 0.1$$

«ب» ما هو شرط الاستقرار في هذه الطريقة؟

حيث  $p(x)$  هي متعددة حدود الاستكمال من الدرجة الثانية للنقط  
 $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ،  $(x_i, y_i)$ ،  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . أنظر تمرين (1) من مجموعة تمارين  
 (5) والأشكال (10.1)، (10.2) للتوضيح.



شكل (10.1) اشتقاق صيغة التنبؤ في طريقة ملن



شكل (10.2) اشتقاق صيغة التصحيح في طريقة ملن. بـ"هـ"

«ج» مستعملاً متسلسلة تايلور، أوجد مرتبة الخطأ الموضعي لهذه  
 الطريقة في حل معادلة الاختبار:  $y' = -\lambda y$   
 «د» أكتب البرنامج الفرعي الذي يستعمل هذه الطريقة في حل  
 $y' = f(x, y)$ .

### 7.10 طريقة ملن Milne's Method

إن هذه الطريقة هي أكثر دقة من الطرق السابقة وهي تستفيد من طريقة  
 سيمسن في التكامل العددي:

$$(10.1) \quad \int_{x_i}^{x_{i+2}} g(x) dx = \frac{h}{3} [g(x_i) + 4g(x_{i+1}) + g(x_{i+2})]$$

حيث الخطأ الموضعي في هذا التقريب هو:

$$(10.2) \quad e_i = -\frac{h^5}{90} g^{(4)}(\xi_i)$$

فإذا وضعنا

$$y' = g(x) = f(x, y)$$

نحصل على:

$$(10.3) \quad y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3} [f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}]$$

حيث  $f_i$  هي  $f(x_i, y_i)$ . نلاحظ هنا أن (10.3) صيغة ضمنية ذات خطوتين،  
 وبالتالي نحتاج إلى صيغة تنبؤ. وقد اقترح ملن استعمال الصيغة التالية لهذا  
 الغرض:

$$(10.4) \quad p_{i+2} = y_{i-2} + \frac{4h}{3} [2f_{i-1} - f_i + 2f_{i+1}]$$

ويمكن الحصول على هذه الصيغة من التقريب:

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} y' dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} p(x) dx$$

لحل المسألة:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

أحسب:  $(i = 0, 1, 2, \dots)$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$(11.1) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

مثال (11.1):

أحسب  $y_1$  بطريقة رانج كوتا إذا كان

$$y' = e^{-x} - y, y(0) = 0, h = 0.1$$

في هذه الحالة:

$$f(x, y) = e^{-x} - y$$

$$k_1 = hf(0, 0) = .1$$

$$k_2 = hf(0 + .1/2, 0 + .1/2) = .1 (e^{-.05} - .05) = .0901229$$

$$k_3 = hf(0 + .1/2, 0 + .0901229/2) = .09061679$$

$$k_4 = hf(.1, .09061679) = .081422$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = .090483933$$

لاحظ أن طريقة ملن في التنبؤ تتكون من 4 خطوات، أي أن حساب  $y_3$  مثلاً يتطلب معرفة  $y_1, y_2, y_3, y_4$ .

مثال (10.1):

اكتب برنامجاً فرعياً يحسب:

$$y_3, y_4, \dots, y_n$$

وذلك باستعمال طريقة ملن في حل المعادلة:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_1) = y_1$$

مع اعتبار أن  $y_2, y_3, y_4, x_2, x_3, x_4$  قد تم حسابها في البرنامج الرئيسي.

SUBROUTINE MM (X, Y, N, H, F)

DIMENSION X(N), Y(N)

F2 = F(X(2), Y(2))

F3 = F(X(3), Y(3))

F4 = F(X(4), Y(4))

DO 10 I = 5, N

P = Y(I - 4) + (4 \* H/3) \* (2 \* F2 - F3 + 2 \* F4)

Y(I) = Y(I - 2) + (H/3) \* (F3 + 4 \* F4 + F(X(I), P))

F2 = F3

F3 = F4

F4 = F(X(I), Y(I))

CONTINUE

RETURN

END

10

7.11 طريقة رانج كوتا Runge-Kutta Method

تضم هذه الطريقة مجموعة من الطرق لها مراتب مختلفة للخطأ، إلا أن أشهر هذه الطرق هي ذات المرتبة الخامسة في الخطأ الموضعي أي  $O(h^5)$  وتعتمد على الصيغة التالية:

## ملاحظات:

الحل الصحيح في المثال السابق هو:

$$y(.1) = (.1) \exp(-.1) = .09048374$$

وبالتالي فإن الخطأ في هذه القيمة التي تحصلنا عليها بسيط جداً وفي حدود 0.0000002. وهذا يدل على الدقة العالية التي تتمتع بها طريقة رانج كوتا. إلا أننا يجب ألا ننسى أن المجهود الحسابي في هذه الطريقة هو مثلاً ضعف المجهود في طريقة أويلر المعدلة حيث إن كل خطوة في طريقة رانج كوتا تتطلب حساب الدالة  $f$  أربع مرات بينما يتم ذلك مرتين فقط في طريقة أويلر المعدلة.

## مثال (11.2):

بين أن طريقة رانج كوتا تؤول إلى طريقة ملن (خطوة التصحيح) في حل المعادلة:

$$y' = f(x)$$

أي عندما  $f$  تعتمد على  $x$  فقط.

في هذه الحالة:

$$k_1 = h f(x_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = h f(x_i + \frac{h}{2})$$

$$k_4 = h f(x_i + h)$$

أي أن  $k_2 = k_3$  وبالتالي فإن:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[ f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i + h) \right]$$

وهي صيغة التصحيح نفسها في طريقة ملن بخطوة مقدارها  $\frac{h}{2}$ .

## مثال (11.3):

اكتب برنامجاً فرعياً لحساب  $Y(I+1)$  من  $Y(I)$  و  $X(I)$  بطريقة رانج كوتا لحل المعادلة

$$Y' = F(X, Y)$$

واستعمله لإيجاد قيمة  $y$  عند  $x = 1$  في حل المعادلة  $y' = xy$ .  $y(0) = 1$ .  
(في هذا البرنامج الفرعي أطلق على  $Y(I+1)$  اسم YNEW وأطلق الاسم YOLD على  $Y(I)$ ).

```
SUBROUTINE RK4 (X, YOLD, YNEW, H, F)
REAL K1, K2, K3, K4
K1 = H * F (X, YOLD)
K2 = H * F (X + H/2, YOLD + K1/2)
K3 = H * F (X + H/2, YOLD + K2/2)
K4 = H * F (X + H, YOLD + K3)
YNEW = YOLD + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6.
RETURN
END
```

البرنامج الرئيسي لحل المسألة وإيجاد قيمة  $y$  عند  $x = 1$  كما يلي:

```
EXTERNAL F
X = 0
Y = 1
H = 0.1
10 CALL RK4 (X, Y, YN, H, F)
X = X + H
IF (X .GE. 1. 0) GO TO 20
Y = YN
GO TO 10
20 WRITE (*, *) Y
STOP
END
```

لاحظ أن هذا البرنامج يجب أن يحتوي على برنامج فرعي لتعريف الدالة  $F$ ، وفي هذا المثال الدالة هي:

```
FUNCTION F (X, Y)
F = X * Y
RETURN
END
```



## تمارين (5)

- 1- استعمال طريقة ملن (صيغة التصحيح فقط) لحساب  $y$  عند  $x = 2, 3$ ،  
بحل المعادلة  $y' = -y$  واعتبار:

$$y(0) = 1, y(1) = .90483743$$

- 2- بين أن صيغة التصحيح في طريقة ملن (قاعدة سمسن) غير مستقرة.  
3- اكتب برنامجاً لحساب  $y$  عند  $x = 4, 5, 6, \dots, 1$  بحل المعادلة:

$$y' = xy^2 + 1$$

$$y(0) = 1$$

وحساب  $y(1), y(2), y(3)$  بطريقة أويلر المعدلة مستعملاً  $h = .05$   
في طريقة أويلر المعدلة و  $h = 0.1$  في طريقة ملن.

- 4- أعد كتابة البرنامج في تمرين 3- مستعملاً طريقة رانج كوتا بدلاً من  
طريقة أويلر المعدلة.

- 5- أحسب  $y$  عند  $x = 1, 2$  بطريقة رانج كوتا في حل المعادلة:

$$y' = y^2 + 1, y(0) = 0$$

قارن بالحل الصحيح:

$$y = \tan(x)$$

- 6- بين أن:

$$|c(\phi)| = \left| 1 - \phi + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{6} + \frac{\phi^4}{24} \right| < 1$$

هو الشرط في الاستقرار في طريقة رانج كوتا ( $\phi = h\lambda$ ). حاول تحديد  
هذه الفترة بأخذ قيم مختلفة لـ  $\phi$ ، ورسم  $c(\phi)$ .

مثال (11.4):

بين أن طريقة رانج كوتا لها خطأ موضعي من المرتبة الخامسة عند حل  
المعادلة  $y' = y$ .

نلاحظ أولاً أن  $y' = y'' = y''' = \dots$  : يعني أن:

وبالتالي من متسلسلة تايلور:

$$y_{i+1} = y_i + h y_i + \frac{h^2}{2!} y_i + \frac{h^3}{3!} y_i + \frac{h^4}{4!} y_i + O(h^5)$$

ومن طريقة رانج كوتا، نحصل على  $y_{i+1}^*$  (أي القيمة التقريبية لـ  $y_{i+1}$ )  
كالآتي:

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = hy_i$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) = hy_i + \frac{h^2 y_i}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) = hy_i + \frac{h^2}{2} y_i + \frac{h^3}{4} y_i$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) = hy_i + h^2 y_i + \frac{h^3}{2} y_i + \frac{h^4}{4} y_i$$

$$y_{i+1}^* = y_i + \frac{1}{6} \left[ hy_i + 2hy_i + h^2 y_i + 2hy_i + h^2 y_i + \frac{h^3}{2} y_i \right.$$

$$\left. + hy_i + h^2 y_i + \frac{h^3}{2} y_i + \frac{h^4}{4} y_i \right]$$

$$= y_i + \frac{1}{6} [6hy_i] + \frac{1}{6} [3h^2 y_i] + \frac{1}{6} [h^3 y_i] + \frac{1}{6} \left[ \frac{h^4 y_i}{4} \right]$$

$$= y_i + hy_i + \frac{h^2}{2} y_i + \frac{h^3}{6} y_i + \frac{h^4}{24} y_i$$

ومن تعريفنا للخطأ الموضعي بأنه الفرق بين  $y_{i+1}^*$  و  $y_{i+1}$  نرى بأنه يتناسب مع  
 $h^5$  وبالتالي فهو من المرتبة الخامسة.

## 7.12 حل المعادلات التفاضلية الآتية

كثيراً ما تواجه الدارس في العلوم الطبيعية معادلات تفاضلية آتية (Simultaneous differential equations) على النحو:

$$y' = f(x, y, u)$$

$$u' = g(x, y, u)$$

(12.1)

وهما معادلتان تفاضليتان في مجهولين هما  $y$  و  $u$  وكلاهما يعتمد على المتغير  $x$ . في هذه الحالة نحتاج إلى شرطين ابتدائيين، أي:

$$y(x_0) = y_0, u(x_0) = u_0$$

مثال (12.1):

استعمل طريقة أويلر لحساب  $y$  و  $u$  عند  $x = 1$  من المعادلتين:

$$y' = xy + u$$

$$u' = uy + 1$$

والشرطين الابتدائيين:

$$y(0) = 0, u(0) = 1$$

نلاحظ هنا أن:

$$f(x, y, u) = xy + u$$

$$g(x, y, u) = uy + 1$$

إذن بطريقة أويلر:

$$y(1) = y(0) + (1) f(0, 0, 1) = 0.1$$

$$u(1) = u(0) + (1) g(0, 0, 1) = 1.1$$

مثال (12.2):

استعمل طريقة أويلر المعدلة لحل المثال (12.1):

$$\bar{y}(1) = y(0) + (1) f(0, 0, 1) = 0.1$$

$$\bar{u}(1) = u(0) + (1) g(0, 0, 1) = 1.1$$

وهي القيم التقديرية ويتم تصحيحها بالآتي:

$$y(1) = y(0) + \frac{(1)}{2} [f(0, 0, 1) + f(0.1, 0.1, 1.1)]$$

$$= (0.05) (1 + 1.11)$$

$$= (0.05) (2.11)$$

$$= .1055$$

$$u(1) = u(0) + \frac{(1)}{2} [g(0, 0, 1) + g(0.1, .1055, 1.1)]$$

$$= 1 + (0.05) [1 + (1.1) (.1055) + 1]$$

$$= 1.1058025$$

مثال (12.3):

استعمل طريقة رانج كوتا لكتابة برنامج فرعي لحل المعادلتين (12.1) من النقطة الابتدائية

$$X(1), Y(1), U(1)$$

$$X(N), Y(N), U(N)$$

وهما حالة خاصة من (12.1) حيث هنا:

$$f(x, y, u) = u$$

لاحظ أن حل معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية يتطلب شرطين ابتدائيين هما:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = u_0$$

وفي هذه الحالة فإن المسألة تعتبر مسألة قيمة ابتدائية وهي النوع من المسائل الذي سندرسه هنا. أما النوع الثاني فهو ما يسمى بمسألة القيمة الحدية (boundary-value problem) وفيه تتحدد القيم:

$$y(x_0) = y_0, y(x_n) = y_n$$

أي النقطتين عند الحدين للفترة  $[x_0, x_n]$ .

مثال (13.1):

احسب  $y$  عند  $x=1$  و  $x=2$  باستعمال طريقة أويلر في حل المسألة الابتدائية:

$$y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

نعرف الدالة  $u$  بأنها:

$$y' = u$$

وبالتالي فإن:

$$u' = -y$$

أي أن:

$$y' = f(x, y, u) = u$$

$$u' = g(x, y, u) = -y$$

وعلى ذلك:

$$y(1) = y(0) + (1) (1) = 0.1$$

$$u(1) = u(0) + (1) (-y_0) = 1$$

$$y(2) = y(1) + (1) (1) = 0.2$$

$$u(2) = u(1) + (1) (-1) = 0.99$$

```
SUBROUTINE RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
REAL K1, K2, K3, K4, L1, L2, L3, L4
DIMENSION X(N), Y(N), U(N)
DO 10 I = 1, N - 1
  XI = X(I)
  YI = Y(I)
  UI = U(I)
  K1 = H * F (XI, YI, UI)
  L1 = H * G (XI, YI, UI)
  K2 = H * F (XI + H/2, YI + K1/2, UI + L1/2)
  L2 = H * G (XI + H/2, YI + K1/2, UI + L1/2)
  K3 = H * F (XI + H/2, YI + K2/2, UI + L2/2)
  L3 = H * G (XI + H/2, YI + K2/2, UI + L2/2)
  K4 = H * F (XI + H, YI + K3, UI + L3)
  L4 = H * G (XI + H, YI + K3, UI + L3)
  X (I + 1) = X (I) + H
  Y (I + 1) = YI + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/6
  U (I + 1) = UI + (L1 + 2 * L2 + 2 * L3 + L4)/6
CONTINUE
RETURN
END
```

### 7.13 المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

الشكل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية التي نحن بصدد

دراستها هو:

$$y'' = g(x, y, y')$$

حيث  $g$  دالة في ثلاثة متغيرات (على الأكثر) هي  $y', y, x$ . تعتبر هذه المعادلة من المرتبة الثانية لأن أكبر مرتبة لمشتقة الدالة  $y$  هي المرتبة الثانية نظراً لوجود  $y'$  في المعادلة. وبالإمكان تحويل المعادلة إلى معادلتين آتيتين، كل معادلة هي من المرتبة الأولى وذلك بأخذ:

$$u = y'$$

وبالتالي فإن:

$$u' = y'' = g(x, y, u)$$

$$y' = u$$

أي أن لدينا المعادلتين:

$$u' = g(x, y, u)$$

$$\ell_1 = -hy_0 = -(1)(0) = 0$$

$$k_2 = h(u_0 + \ell_1/2) = (1)(1 + 0) = 0.1$$

$$\ell_2 = -h(y_0 + k_1/2) = -(1)(0 + .05) = -.005$$

$$k_3 = h(u_0 + \ell_2/2) = (1)(1 - .0025) = .09975$$

$$\ell_3 = -h(y_0 + k_2/2) = -(1)(.1/2) = -.005$$

$$k_4 = h(u_0 + \ell_3) = (1)(1 - .005) = .0995$$

$$\ell_4 = -h(y_0 + k_3) = -(1)(.09975) = -.009975$$

$$y(.1) = y(0) + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]/6 = .0998333$$

وهي قيمة قريبة جداً من الحل الصحيح :

$$y(.1) = \sin(.1) = .0998334$$

### تمارين (6)

1- أحسب قيم  $u$  و  $v$  عند:

$$t = .1, .2, .3$$

من المعادلات الآتية:

$$u' = u - 4v$$

$$v' = -u + v$$

$$u(0) = 1 \text{ و } v(0) = 0$$

والشرطين الابتدائيين 1 و 0  $u(0)$  و  $v(0)$

«ب» بطريقة أويلر المعدلة  
«د» بطريقة الفرق المتأخر

«أ» بطريقة أويلر  
«ج» بطريقة رانج كوتا

لاحظ أن حل المسألة هو:

$$y = \sin(x)$$

أي أن القيم الصحيحة هي:

$$y(.1) = \sin(.1) = .0998$$

$$y(.2) = \sin(.2) = .1986$$

مثال (13.2):

استعمل طريقة أويلر المعدلة لحل المسألة السابقة.

$$\bar{u}(.1) = u(0) + (.1)(-y_0) = 1$$

$$y(.1) = y(0) + \frac{.1}{2}[u(0) + \bar{u}(.1)] = 0.1$$

$$u(.1) = u(0) + \frac{.1}{2}[-y(0) - y(.1)] = .995$$

$$\bar{u}(.2) = u(.1) + (.1)(-y(.1)) = .985$$

$$y(.2) = y(.1) + \frac{.1}{2}[u(.1) + \bar{u}(.2)] = .199$$

لاحظ هنا استعمال  $\bar{u}$  كقيمة تنبؤية وليست هناك حاجة لحساب  $\bar{y}$ .

مثال (13.3):

أحسب قيمة  $y$  عند  $x = .1$  من المعادلة

$$y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

بطريقة رانج كوتا.

$$x_0 = 0, y_0 = 0, u_0 = 1$$

$$k_1 = hu_0 = 0.1$$

قارن الحلول مع الحل:

$$u = 0.5 (e^{-t} + e^{3t})$$

$$v = 0.25 (e^{-t} - e^{3t})$$

2- بين أن المعادلتين في تمرين (1) يمكن وضعهما على النحو:

$$Y' = AY$$

حيث:

$$Y' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ومن ذلك فإن طريقة أويلر تكتب على النحو:

$$Y_{i+1} = CY_i$$

أوجد المصفوفة C. كذلك أوجد المصفوفة C في حالة استعمال طريقة الفرق المتأخر وطريقة شبه المنحرف.

3- استعمل «أ» طريقة أويلر، «ب» طريقة أويلر المعدلة، «ج» طريقة رانج كوتا.

حل المعادلة التفاضلية (عند  $t = 0.1, t = 0.2$ ).

$$y'' + t^2 y' + 3y = t$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2$$

4- أكتب برامج فرعية لحساب  $u_i, v_i$  عند  $x_i$  حيث  $i$  من 1 إلى  $n$  وذلك بحل المعادلتين:

$$u' = f(x, u, v), u(x_0) = u_0$$

$$v' = g(x, u, v), v(x_0) = v_0$$

أ) بطريقة أويلر. ب) بطريقة أويلر المعدلة. ج) بطريقة رانج كوتا.

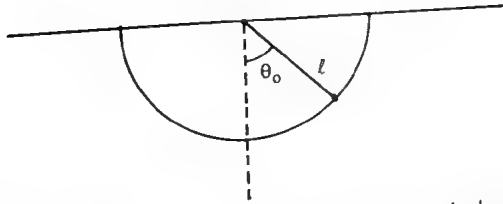
5- أعد كتابة البرامج الفرعية في تمرين (4) لحل  $m$  معادلة تفاضلية مع  $m$  شرط ابتدائي.

6- أكتب برنامجاً فرعياً لحل نظام من المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة شبه المنحرف. (لاحظ أن مثل هذا البرنامج يتطلب برنامجاً فرعياً آخر لإيجاد معكوس مصفوفة. استعن بتمرين (2) في الحل).

7- المعادلة التالية:

$$\theta'' + \frac{c}{m\ell} \theta' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

تصف حركة البندول كما في الرسم التالي:



استعمل طريقة مناسبة لإيجاد  $\theta(t)$  ابتداء من  $\theta(0) = \frac{\pi}{4}, \theta'(0) = 0$  حتى يتوقف البندول عن الحركة. افترض أن  $\frac{c}{m\ell} = 1, \frac{g}{\ell} = 3$ . استخدم  $\Delta t = 0.1$ .

## مسائل القيم الحدية Boundary-Value Problems

### 8.1 مقدمة

مسائل القيم الحدية هي ذلك النوع من المسائل التي تتحدد فيه المعادلة التفاضلية وقيم المتغير  $y$  عند نقاط الحدود (boundary points). فمثلاً المعادلة:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b \quad (1.1)$$

مع القيم الحدية:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (1.2)$$

حيث  $y_a, y_b$  قيم معلومة. تعرف (أي المعادلة مع القيم الحدية) بمسألة قيم حدية لنقطتين.

والغرض من حل مسألة القيم الحدية عددياً هو إيجاد قيم تقريبية للمتغير  $y$  عند النقطة  $x_i$  حيث:

$$x_i = x_0 + ih, \quad x_0 = a$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

### اختبار نموذجي (1)

الزمن: 1:30 (ساعة ونصف)

س (1) : أكمل ما يلي:

تعتبر طريقة ..... ذات استقرار مشروط، أما طريقة ..... فهي غير مستقرة على الإطلاق، بينما تعتبر طريقة ..... مستقرة بدون شرط.

س (2) : استعمل طريقة أولر المعادلة لتقدير  $y$  عند  $x = 1$  من  $y(0) = 1$  والمعادلة  $y'y = 1$ . (استخدم 4 خانات عشرية في الحساب).

س (3) : أكتب برنامجاً للمقارنة بين الحل الصحيح  $y = e^{-x}$  للمعادلة  $y' = -y$  والشرط  $y(0) = 1$  والحل العددي بطريقة أولر عند  $x = 1$  بأخذ قيم مختلفة لمقدار الزيادة  $h$  بحيث:

$$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$$

س (4) : أكتب برنامجاً لاستعمل طريقة رانج - كوتا لحساب  $y_2$  علماً بأن:

$$y' = 4x^3, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad h = 0.2$$

ب) لماذا تعطي طريقة رانج - كوتا قيم  $y_i$  مساوية للحل الصحيح عند حل المعادلة  $y' = 4x^3$ .

س (5) : أوجد مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة شبه المنحرف.

أي أن:

$$x_n = b$$

وبالتالي فإن عدد المجاميل هو  $n - 1$  قيمة، وهي:

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$$

حيث إن القيم الحدية تعتبر معلومة، وهي:

$$y_0 = y(x_0) = y_a$$

$$y_n = y(x_n) = y_b$$

## 8.2 طريقة التصويب Shooting method

تعتمد هذه الطريقة على تحويل مسألة القيم الحدية إلى مسألة قيم ابتدائية وذلك بإيجاد  $y'(x_0)$  التي تحقق القيمة الحدية  $y_b$ .

مثال (2.1):

استعمل طريقة التصويب لحل المعادلة:

$$y'' + y' + y = -2x^2$$

مع الشرطين الحدين:

$$y(0) = 0, y(1) = 2$$

نجري أولاً التحويل التالي:

$$y' = u$$

$$u' = -(2x^2 + y + u)$$

لحل هاتين المعادلتين كمسألة قيم ابتدائية، تتوفر لدينا:

$$y_0 = 0$$

ولكن  $u_0$  مجهولة. نحاول أولاً تقدير  $u_0$  عشوائياً وليكن مثلاً:

المحاولة الأولى:

$$u_0 = 2$$

نستعمل في هذا المثال طريقة أويلر المعدلة أو أي طريقة أخرى مناسبة مع افترض  $h = 0.25$  لنحصل على:

$$\bar{u}_{i+1} = u_i + hg(x_i, y_i, u_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [u_i + \bar{u}_{i+1}]$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} [g(x_i, y_i, u_i) + g(x_{i+1}, y_{i+1}, \bar{u}_{i+1})]$$

$$g(x, y, u) = -(2x^2 + y + u) \quad \text{حيث:}$$

$$h = 0.25, x_0 = 0, x_n = 1 \quad \text{وبما أن:}$$

$$n = \frac{1}{0.25} = 4 \quad \text{فإن:}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \quad \text{أي أننا نحتاج لحساب:}$$

وبعدها نختبر قيمة  $y_4$ ، فإذا كانت:

$$y_4 = y(1) = 2$$

فإن المحاولة الأولى قد نجحت، أي أن اختيارنا لقيمة  $u_0$  المجهولة قد حققت المطلوب.

وبحساب هذه القيم فعلاً نتحصل على:

$$y_1 = .4375$$

$$y_2 = .7434$$

$$y_3 = .9168$$

$$y_4 = .9352 \neq 2$$

والآن لإيجاد قيمة  $y_0'$  التي تجعل  $y_n$  تساوي 2، نجري العملية:

$$y_0' = \frac{2 + .1296}{.5324} = \frac{2.1296}{.5324} = 4$$

باستعمال هذه القيمة في المحاولة الثالثة (أي  $u_0 = 4$ ):

$$y_1 = .875$$

$$y_2 = 1.5$$

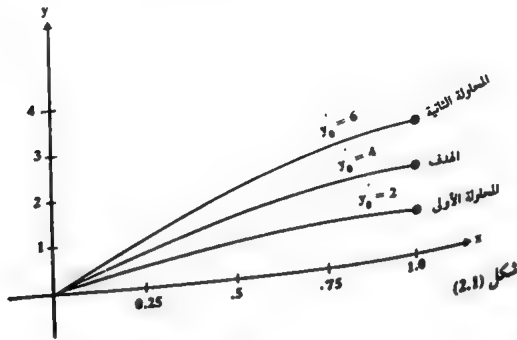
$$y_3 = 1.875$$

$$y_4 = 2$$

وبالتالي فإن هذا هو الحل الصحيح حيث إن  $y_4$  تحقق القيمة الحدية المطلوبة.

ملاحظات:

(1) يوضح الشكل (2.1) لماذا سميت هذه الطريقة بطريقة التصويب، حيث يبين الرسم المنحنيات الثلاثة التي تم الحصول عليها بثلاث محاولات لقيمة  $y_0'$ . لاحظ أن  $y_0$  هو ميل المماس للمنحنى  $y(x)$  عند النقطة  $x_0$ . هذا الميل يمكن



أي أن  $y_4$  لا تساوي  $y(1) = 2$ ، وبالتالي نحتاج إلى محاولة أخرى عشوائية.

$$u_0 = y'(0) = 6$$

المحاولة الثانية، ولتكن

تعطي النتائج التالية:

$$y_1 = 1.3125$$

$$y_2 = 2.2537$$

$$y_3 = 2.8332$$

$$y_4 = 3.0648$$

$$y_4 \neq 2$$

أي أن:

وبالتالي فإننا نحتاج إلى محاولة أخرى، إلا أن هذه المرة لن تكون محاولة عشوائية، ولكن نستعمل طريقة القاطع (أنظر الفصل الأول) للحصول على قيمة قريبة من القيمة الصحيحة. نلاحظ أن  $y_n$  (في هذه الحالة  $y_4$ ) تعتمد على القيمة التي نختارها في البداية (أي  $y_0'$ ). هذا يعني أن:

$$(2.1)$$

$$y_n = \phi(y_0')$$

أي أن  $y_n$  دالة تعتمد على  $y_0'$ . إذا افترضنا أن هذه الدالة خطية، أي:

$$(2.2)$$

$$y_n = m + sy_0' = \phi(y_0')$$

فإن:

$$\begin{aligned} s &= \frac{\phi(6) - \phi(2)}{6 - 2} = \frac{3.0648 - .9352}{4} \\ &= .5324 \\ m &= \phi(6) - 6s \\ &= 3.0648 - 6(.5324) \\ &= 3.0648 - 3.1944 \\ &= -.1296 \end{aligned}$$



اعتباره ميل قوة المدفع (أو البندقية) في محاولة إصابة هدف على بعد كيلومتر واحد (مثلاً)، أي أن  $x_n = 1$  وعلى ارتفاع 2 كيلومتر (مثلاً) أي أن  $y_n = 2$ . باستعمال الميل  $y'_0 = 2$  فإن التصويب كان تحت الهدف وباستعمال ميل أعلى  $y'_0 = 6$  كان التصويب فوق الهدف، ولكن باستعمال الميل الواقع بينهما  $y'_0 = 4$  كان التصويب عند الهدف تماماً.

(2) لاحظ في المثال السابق أن ثلاث محاولات فقط كانت كافية لإيجاد الحل. بالإمكان تعميم هذه النتيجة على المعادلات الخطية، ولكن الأمر ليس صحيحاً إذا كانت المعادلة غير خطية، ولا بد من استبدال الشرط  $y_n = y(x_n)$  بأخر تقريبي، أي نسطر أن  $y_n \approx y(x_n)$ .

والخوارزمية التالية تلخص بتحديد أكثر طريقة التصويب:

1 - حدد المعطيات: الدالة  $g$  والقيم الحدية  $y(x_0)$  و  $y(x_n)$  ورتب التسامح  $\epsilon$  والحد الأعلى لعدد الدورات التكرارية  $\max$  وقيمتين  $\alpha$  و  $\beta$  كتقريبين للقيمة المجهولة  $y'(x_0)$ .

2 - حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'' = g(x, y, y')$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = \alpha$$

وليكن الناتج عند  $x_n$  هو  $y_{nn}$ . (لاحظ عدم تحديد الطريقة العددية).

3 - قارن بين  $y(x_n)$  و  $y_{nn}$ . إذا كانا قريبين في حدود  $\epsilon$ ، اطبع النتائج وتوقف.

4 - حل المسألة في الخطوة 2 ولكن مستعملاً  $\beta = y'(x_0)$  وليكن الناتج عند  $x_n$  هو  $y_{nn}$ .

5 - قارن بين الحل الصحيح  $y(x_n)$  و  $y_{nn}$  بحيث إذا كانا قريبين في حدود  $\epsilon$  اطبع النتائج وتوقف.

6 - أحسب قيمة جديدة للمجهول  $y'(x_0)$  من طريقة القاطع، أي:

$$(2.3) \quad \gamma = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)}{(y_{n\beta} - y_{n\alpha})} (y(x_n) - y_{n\alpha})$$

7 - حل المسألة في الخطوة 2 مع استعمال  $\gamma = y'(x_0)$  وليكن الناتج عند  $x_n$  هو  $y_{n\gamma}$ .

8 - قارن بين  $y(x_n)$  والقيمة  $y_{n\gamma}$ . إذا كانت القيم متقاربة في حدود  $\epsilon$  اطبع النتائج وتوقف.

9 - قم بالتغييرات التالية:

$$\alpha = \beta$$

$$\beta = \gamma$$

10 - أدرج إلى الخطوة (6) لحساب  $\gamma$  جديدة مع التأكد أن عدد الدورات لا يزيد عن العدد المحدد  $\max$ .

مثال (2.2):

اكتب البرنامج الذي يقوم بتنفيذ طريقة التصويب لحل المسألة الحدية:

$$y'' + xy' + y^2 = 1$$

$$y(0) = 1, y(1) = 3$$

مع استعمال البرنامج الفرعي RKM الذي يقوم بحل مسألة القيم الابتدائية:

$$y' = u$$

$$u' = g(x, y, u)$$

حيث:

$$x_1, y_1, u_1$$

هي القيم الابتدائية.

C

```

FUNCTION F (X, Y, U)
F = U
RETURN
END

```

C.....

```

SHOOTING METHOD.....
EXTERNAL F, G
DIMENSION X (11), Y (11), U (11)
WRITE (*, *) 'ENTER X1, XN, H, Y1, YLAST, EPS, MAX, ALPHA, BETA'
READ (*, *) X (1), XN, H, Y (1), YLAST, EPS, MAX.
* ALPHA, BETA
U (1) = ALPHA
N = (XN - X (1)) / H + 1.5
CALL RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
IF (ABS (YLAST - Y (N)). LE. EPS) GO TO 200
YALPHA = Y (N)

```

C

```

U (1) = BETA
CALL RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
WRITE (*, *) BETA, (Y (I), I = 1, N)
IF (ABS (YLAST - Y (N)). LE. EPS) GO TO 200
YBETA = Y (N)

```

C

```

DO 50 K = 1, MAX
GAMMA = ALPHA + (BETA - ALPHA) * (YLAST - YALPHA)
* / (YBETA - YALPHA)
U (1) = GAMMA
CALL RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
YGAMMA = Y (N)
IF (ABS (YGAMMA - YLAST). LE. EPS) GO TO 100
ALPHA = BETA
BETA = GAMMA
YALPHA = YBETA
YBETA = YGAMMA
50 CONTINUE
100 WRITE (*, 10) GAMMA
10 FORMAT ('INITIAL DERIVATIVE =', F20.6)
20 WRITE (*, 20) K
20 FORMAT ('NO. OF ITERATIONS =', I3)
30 DO 30 I = 1, N
30 WRITE (*, 40) I, Y (I)
40 FORMAT ('Y (', I2, ') =', E12.6)
200 STOP
END

```

C

```

FUNCTION G (X, Y, U)
G = 1 - X * U - Y * Y
RETURN
END

```

## تمارين (1)

1 - «أ» بين أن مسألة القيم الحدية في المثال (2.1) لها الحل:

$$y(x) = 4x - 2x^2$$

«ب» علّل لماذا أعطت طريقة أولر المعادلة في هذا المثال قيم  $y_i$  مساوية للحل الصحيح؟

«ج» أعد الحسابات في المثال نفسه مستعملاً طريقة أولر بدلاً من الطريقة المعدلة. ماذا تلاحظ؟

«د» استعمل طريقة نقطة المنتصف وقارن بالحل الصحيح. احسب  $y_1$ ،  $y_2$  من طريقة أولر.

2 - إذا كانت المعادلة التي تحدد مسار قذيفة  $y(x)$  هي:

$$y'' + y'^2 + y = 7$$

حيث  $y$  تمثل الارتفاع و  $x$  تمثل البعد بالكيلومتر، استعمل طريقة التصويب لإيجاد الميل عند نقطة الانطلاق  $y'(0)$  لإصابة هدف على بعد 2 كيلومتر وارتفاع 2 كيلومتر، وذلك:

«أ» باستعمال الحاسب اليدوي في 3 محاولات بأخذ  $h = 0.5$  في طريقة أولر.

«ب» باستعمال الحاسوب في حل المسألة مستخدماً طريقة رانج كوتا واعتبار  $h = 0.1$ .

3 - المطلوب كتابة برنامج فرعي لطريقة التصويب لحل المسألة الحدية:

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = y_a, y(b) = y_b$$

علماً بأن  $y'(a)$  مجهولة ولكن تقع في الفترة  $(\alpha, \beta)$  حيث  $\alpha, \beta$  من المعطيات. لاحظ أن في هذه الحالة يمكن استعمال طريقة التصويب مع طريقة الوضع الخاطئ أو طريقة التنصيف لضمان التقارب.

«أ» أكتب البرنامج مستعملاً طريقة التنصيف.

«ب» أكتب البرنامج مستعملاً طريقة الوضع الخاطئ.

4 - عند حل مسألة القيم الحدية الخطية:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b$$

حيث  $p, q, r$  دوال معلومة في  $x$ ، نحصل على الحل  $y_a(x)$  بطريقة التصويب باستعمال  $y'(a) = \alpha$ ، ونحصل على الحل  $y_b(x)$  باستعمال  $y'(a) = \beta$ . اثبت أن الحل الصحيح هو:

$$y(x) = \left[ \frac{y_b - y_a(b)}{y_a(b) - y_b(b)} \right] y_a(x) + \left[ \frac{y_a(b) - y_b}{y_a(b) - y_b(b)} \right] y_b(x)$$

5 - استعمل صيغة الحل في تمرين (4) لحل مسألة القيم الحدية في مثال (2.1). هل يمكن استعمال هذه الصيغة لحل المسألة في تمرين (2)؟

6 - أكتب برنامجاً لحل مسألة القيم الحدية الخطية في تمرين (4) باستعمال الصيغة المذكورة في التمرين.

## 8.3 طريقة الفروق المنتهية

في هذه الطريقة، نقوم بإيجاد حل تقريبي لمسألة القيم الحدية:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b$$

(3.1)

حيث:

$$(3.10) \quad \begin{cases} A_i = 1 - p_i h/2 \\ B_i = -2 + h^2 q_i \\ C_i = 1 + p_i h/2 \\ D_i = h^2 r_i \end{cases}$$

بأخذ قيم  $i$  بحيث:

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

في (3.9) نحصل على المعادلات الخطية الآتية:

$$B_1 y_1 + C_1 y_2 = D_1 - A_1 y_0$$

$$A_2 y_1 + B_2 y_2 + C_2 y_3 = D_2$$

$$A_3 y_2 + B_3 y_3 + C_3 y_4 = D_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_{n-1} y_{n-2} + B_{n-1} y_{n-1} = D_{n-1} - C_{n-1} y_n$$

وهذه المعادلات يمكن كتابتها بطريقة المصفوفات كالآتي:

$$(3.11) \quad \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & B_{n-1} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - A_1 y_0 \\ D_2 \\ D_3 \\ \dots \\ D_{n-1} - C_{n-1} y_n \end{bmatrix}$$

وذلك باستخدام الصيغ التقريبية للمشتقات  $y', y''$  بطريقة الفروق المنتهية (انظر الفصل السادس). فمثلاً، إذا استعملنا الصيغ:

$$(3.2) \quad y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$(3.3) \quad y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

وهما صيغتان من المرتبة الثانية (أي  $O(h^2)$ ) فإننا نحصل من (3.1) على معادلة الفروق:

$$(3.4) \quad y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}) = 0$$

هذه المعادلة تتطلب حلاً تحت الشرطين:

$$y_0 = y_a, y_n = y_b$$

حيث  $n$  هي عدد التقسيمات للفترة  $[a, b]$  وحيث  $h$  هي طول كل تقسيمة، أي:

$$(3.5) \quad h = \frac{b-a}{n}, n = \frac{b-a}{h}$$

إذا كانت الدالة  $f$  خطية على النحو:

$$(3.6) \quad f(x, y, y') = -p(x) y' - q(x) y + r(x)$$

فإن المعادلة المطلوب حلها هي:

$$(3.7) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ويستعمل الرموز:

$$(3.8) \quad r_i = r(x_i), q_i = q(x_i), p_i = p(x_i)$$

والتعويض في (2.4) نحصل على:

$$(3.9) \quad A_1 y_{i-1} + B_1 y_i + C_1 y_{i+1} = D_i$$

وعند الحل، نحصل على:

$$\begin{aligned} y_1 &= .2943 \\ y_2 &= .5702 \\ y_3 &= .8104 \end{aligned}$$

ملاحظات:

(1) الحل الصحيح للمسألة في المثال السابق هو:

$$y(x) = \sin(x) / \sin(1)$$

$$\begin{aligned} y(.25) &= .2940 \\ y(.5) &= .5698 \\ y(.75) &= .8101 \end{aligned}$$

أي أن:

وبالمقارنة بالحل العددي في طريقة الفروق المحدودة نجد أن الخطأ لا يتعدى الحانة العشرية الرابعة بعد الفاصلة.

(2) لو كانت المعادلة (3.1) غير خطية لتتج عنها نظام من المعادلات غير خطية.

(3) لو فرضنا  $h = 0.1$  لأصبح النظام الخطي ذا تسعة مجاهيل. وهو عدد كبير بالنسبة للحل اليدوي، ويصبح من الضروري أن يستعمل الحاسوب لحل المسألة.

مثال (3.2):

أكتب برنامجاً لحل المسألة الحدية:

$$y'' + xy' + x^2y = \sin(x)$$

$$Y(0) = 0, Y(1) = 2$$

بطريقة الفروق المنتهية مستعملاً البرنامج الفرعي:

SUBROUTINE TRID (A, B, C, M, E, Y)

الذي يوجد الحل Y للنظام الخطي ذي الأقطار الثلاثة A, B, C، والمتكون من M مجهول. العمود E هو الطرف الأيمن من النظام.

لاحظ أن المصفوفة في هذا النظام الخطي تتكون من القطر  $B_i$  وتحت القطر  $A_i$  وفوق القطر  $C_i$  وبقية العناصر في المصفوفة كلها أصفار. تسمى مثل هذه المصفوفة مصفوفة ذات الأقطار الثلاثة Tridiagonal matrix. بالإمكان حل النظام الخطي (3.11) بطريقة جاوس مثلاً مع مراعاة أن وجود الأصفار في المصفوفة القطرية الثلاثية يوفر الكثير من الحسابات عند تحويلها إلى مصفوفة مثلثة.

مثال (3.1):

حل المسألة الحدية:

$$y'' + y = 0, y(0) = 0, y(1) = 1$$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية. استعمل  $h = .25$

نلاحظ في هذا المثال أن  $f(x, y, y') = -y$

من (3.4) نحصل على:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2(-y_i) = 0$$

$$y_{i+1} + (-2 + h^2)y_i + y_{i-1} = 0$$

$$n = \frac{1-0}{.25} = 4 \quad \text{وبما أن } h = .25 \text{ فإن}$$

وبالتالي يكون عدد المجاهيل 3 هي  $y_1, y_2, y_3$ . ويكون النظام الخطي (3.11) على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} -1.9375 & 1 & 0 \\ 1 & -1.9375 & 1 \\ 0 & 1 & -1.9375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بأخذ  $h = \frac{1}{3}$  وتحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة فروق نحصل على:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \frac{h}{2} (y_{i+1} - y_{i-1}) = 2(1 + x_i) h^2$$

$$\text{عند } x_1 = \frac{1}{3}$$

$$y_0 - 2y_1 + y_2 + \frac{1}{6} (y_2 - y_0) = 2\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$-12y_1 + 7y_2 = 16/9$$

$$\text{وعند } x_2 = \frac{2}{3}$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 + \frac{1}{6} (y_3 - y_1) = 2\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$5y_1 - 12y_2 + 7y_3 = 20/9$$

لاحظ أن  $y_3$  هي قيمة  $y$  عند  $x = 1$  مجهولة لأن القيمة المعطاة عند الحد الأيمن هي  $y'$  وليست  $y$ . لحل هذه المشكلة يمكن أن نستعمل التقريب:

$$y_3 \approx \frac{y_3 - y_2}{h}$$

أي الفرق المتأخر من المرتبة الأولى. إذن:

$$\frac{y_3 - y_2}{h} \approx 2$$

أو:

$$y_3 - y_2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

وبالتالي فإن النظام الخطي هو:

$$\begin{bmatrix} -12 & 7 & 0 \\ 5 & -12 & 7 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$

C..... FINITE DIFFERENCE METHOD.....

DIMENSION A (100), B(100), C(100), D(100), Y(100)

P(X) = X

Q(X) = X \* X

R(X) = SIN (X)

READ (\*, \*) H, XO, XN, YA, YB

M = (XN - XO) / H - .5

DO 10 I = 1, M

X = XO + I \* H

A(I) = 1 - P(X) \* H/2

B(I) = -2 + H \* H \* Q (X)

C(I) = 1 + P(X) \* H/2

10 D(I) = H \* H \* R(X)

D(1) = D(1) - A(1) \* YA

D(M) = D(M) - C(M) \* YB

CALL TRID (A, B, C, M, D, Y)

DO 20 I = 1, M

20 WRITE (\*, \*) I, Y(I)

30 FORMAT (' Y( ', I2, ') ', E20.6)

STOP

END

SUBROUTINE TRID (A, B, C, M, E, Y)

DIMENSION A(M), B(M), C(M), E(M), Y(M)

DO 10 I = 2, M

CONST = A(I) / B(I - 1)

B(I) = B(I) - CONST \* C(I - 1)

10 E(I) = E(I) - CONST \* E(I - 1)

Y(M) = E(M) / B(M)

DO 20 J = 1, M - 1

20 K = M - J

Y(K) = (E(K) - C(K) \* Y (K + 1)) / B(K)

RETURN

END

مثال (3.3):

أوجد  $y(1/3)$  و  $y(2/3)$  من المسألة الحدية:

$$y'' + y' = 2(1+x)$$

$$y(0) = 0, y'(1) = 2$$

نلاحظ هنا أن :

$$p(x) = 10$$

$$q(x) = 1$$

$$r(x) = 1$$

وبتطبيق (3.10) نحصل على النظام الخطي :

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2.04 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2.04 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .04 \\ .04 \\ .04 \\ -3.96 \end{bmatrix}$$

ولكن مشكلة هذا النظام الخطي أن قيمة  $y_0$  لم نستعملها لإيجاده، أي أنه لا يعتمد على قيمة  $y_0$ ، وهذا يعني وجود تناقض مع الحل الصحيح الذي يعتمد على قيمة  $y(0)$ . لاحظ أن سبب المشكلة هو كون :

$$A_1 = 0$$

$$h = 2/p(x_1)$$

أي عندما :  
وبالتالي يجب اختيار  $h$  بحيث نبقى على القيم الحدية في النظام الخطي.

## تمارين (2)

1- أوجد قيم  $y$  عند  $x = .5, 1, 1.5$  بطريقة التصويب من المسألة الحدية :

$$2y'' - xy' + y = 4 - x^2$$

$$y(0) = 0, y(2) = 12$$

2- في تمرين (1) الحل الصحيح هو :

$$y = x^2 + 4x$$

ويحل هذا النظام نحصل على :

$$y_1 = .1515$$

$$y_2 = .4343$$

$$y_3 = 1.0818$$

ملاحظة :

$$y = x^2$$

الحل الصحيح في المثال السابق هو :

أي أن :

$$y(1/3) = 1/9 = 0.1111$$

$$y(2/3) = 4/9 = .4444$$

$$y(1) = 1$$

الخطأ الموجود في الحل العددي بطريقة الفروق المنتهية (المركزة) في هذا المثال هو ناتج كلية عن تقريب  $y'(1)$  بالفروق المتأخر من الرتبة الأولى. ذلك لأن الخطأ الناتج عن تقريب  $y', y''$  بالفروق المركزة في هذا المثال هو صفر لأن :

$$y = x^2, y' = 2x, y'' = 2, y''' = 0$$

والمعروف أن الخطأ في تقريب  $y'$  باستعمال الفروق المركزي يتناسب مع  $y'''$ . (انظر الفصل السادس). وعلى ذلك نستنتج أن الأخطاء في القيم التي تحصلنا عليها بالحل العددي هي ناتجة في هذا المثال عن تقريب  $y'(1)$  فقط.

مثال (3.4) :

استعمل  $h = .2$  لحل المسألة الحدية :

$$y'' + 10y' + y = 1$$

$$y(0) = 1, y(1) = 2$$

بطريقة الفروق المركزة (المتهية).

## مسائل القيم الذاتية Eigen-value Problems

### 9.1 مقدمة

لوحاولنا إيجاد حل عددي للمسألة الحدية:

$$(1.1) \quad y'' + y = 0, y(0) = y(1) = 0$$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية مع أخذ  $h = \frac{1}{4}$ ، فإننا نحصل على النظام الخطي التالي:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \frac{1}{16} y_i = 0$$

$$16y_{i-1} - 31y_i + 16y_{i+1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يدعى مثل هذا النظام بأنه متجانس homogeneous لأن الطرف الأيمن كله أصفار. والمعروف أن مثل هذا النظام ليس له إلا الحل الصفري (أي قيم  $y_i$  كلها أصفار) إلا إذا كانت محدد المصفوفة تساوي صفراً.

قارن بين الحل العددي بطريقة الفروق المركزية وهذا الحل. لماذا يتساوى الحلان في هذه المسألة؟

3 - إذا كانت  $h = 1$ ، فكم عدد قيم  $y$  المطلوب إيجادها؟  
استعمل برنامجاً لحل المسألة على الحاسب الآلي بهذه القيمة لـ  $h$ .

4 - ما هي قيم  $h$  المحظور استعمالها في حل المسائل التالية بطريقة الفروق المركزية حتى لا تتلاشى القيم الحدية في الحل العددي.

$$(أ) \quad 2y'' + 100y' - y = 0$$

$$y(0) = 1, y(1) = 2$$

$$(ب) \quad y'' - 20xy' + 2y = 1$$

$$y(0) = 2, y(2) = 5$$

5 - حل تمرين (1) مع تغيير القيمة الحدية  $y(0) = 0$  إلى الشرط الحدي:

$$y'(0) = 4$$

(أ) استعمل الفرق المتقدم من المرتبة الأولى لتقريب هذا الشرط.  
قارن مع الحل في تمرين (1) والحل الصحيح في تمرين (2) مع التعليق على هذه النتائج.

(ب) أعد فقرة (أ) ولكن باستعمال تقريب الفرق المتقدم من المرتبة الثانية.



أي أن القيم الممكنة للحصول على حل غير صفري هي:

$$\lambda_1 = 32 - 16\sqrt{2} = 9.37$$

$$\lambda_2 = 32$$

$$\lambda_3 = 32 + 16\sqrt{2} = 54.6$$

لاحظ أن الحل الصحيح للمسألة (1.3) هو:

$$y = c \sin \sqrt{\lambda} x$$

حيث  $c$  مقدار ثابت من القيمة الحدية عند  $x = 1$  نحصل على:

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0$$

أي:

$$\sqrt{\lambda} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

أو:

$$\lambda = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots$$

نقارن الآن بين هذه القيم الصحيحة وقيم  $\lambda$  التي تحصلنا عليها من الحل العلي، فنرى أن:

$$\lambda_1 = 9.37 \approx \pi^2 = 9.86$$

$$\lambda_2 = 32 \approx 4\pi^2 = 39.5$$

$$\lambda_3 = 54.6 \approx 9\pi^2 = 88.8$$

واضح أن  $\lambda$  الصحيحة لها ما لا نهاية من القيم بينما لدينا هنا 3 قيم تقريبية فقط. ولكن لو أخذنا قيماً أصغر للخطوة  $h$  لتحصلنا على قيم أكثر وفي الوقت نفسه أقرب للحل الصحيح.

فعلنها يمكن أن يوجد حل غير الحل الصفري. في هذا المثال واضح أن المحددة ليست صفراً، وعلى ذلك فإن الحل الوحيد هو:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \quad (1.2)$$

لو غيرنا في المسألة (1.1) على النحو:

$$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(1) = 0 \quad (1.3)$$

فإننا نحصل على:

$$16 y_{i+1} + (-32 + \lambda) y_i + 16 y_{i-1} = 0$$

أي أن:

$$\begin{bmatrix} -32+\lambda & 16 & 0 \\ 16 & -32+\lambda & 16 \\ 0 & 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لكي يكون لهذا النظام حل غير الحل الصفري، نوجد قيم  $\lambda$  بحيث:

$$\det \begin{bmatrix} -32+\lambda & 16 & 0 \\ 16 & -32+\lambda & 16 \\ 0 & 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} = 0$$

أي:

$$(-32+\lambda) \begin{bmatrix} -32+\lambda & 16 \\ 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-32+\lambda) [(-32+\lambda)^2 - 16^2 - 16^2] = 0$$

$$(-32+\lambda) [(-32+\lambda - 16\sqrt{2})(-32+\lambda + 16\sqrt{2})] = 0$$

## 9.2 القيم الذاتية للمعادلات التفاضلية

القيم الذاتية Eigenvalues للمعادلة التفاضلية:

$$(2.1) \quad p(x) y'' + q(x) y' + r(x) y = \lambda y$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0$$

هي جميع قيم  $\lambda$  التي تعطي هذه المسألة الحدية حلاً غير الحل الصفري. وتسمى مسألة إيجاد قيم  $\lambda$  بمسألة القيم الذاتية (Eigen-value problem).

إذا استعملنا طريقة الفروق المركزية لحل المسألة (2.1) فإننا نحصل على النظام الخطي:

$$(2.2) \quad \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

أو:

$$(2.3) \quad AY = \lambda Y$$

أي:

$$(2.4) \quad (A - \lambda I) Y = 0$$

حيث  $I$  هي مصفوفة الوحدة. ونظراً لأن هذا النظام الخطي متجانس، فإن الشرط:

$$(2.5) \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

ضروري لوجود حل غير صفري، لاحظ أن الدالة:

$$(2.6) \quad f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

هي متعددة الحدود من الدرجة  $n$  إذا كانت المصفوفة  $A$  ذات أبعاد  $n \times n$ . وبالتالي فإن جذور الدالة  $f(\lambda)$  وعددها  $n$  هي القيم الذاتية التقريبية للمعادلة التفاضلية (2.1)، مع ملاحظة أن القيم الصحيحة قد يكون عددها ما لا نهاية. وأن القيم الذاتية من الممكن أن تكون أعداداً مركبة (ذات جزء حقيقي وجزء تخيلي).

مثال (2.1):

أوجد 3 قيم تقريبية للقيم الذاتية للمسألة:

$$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(1) = 0$$

نلاحظ أولاً أن هذه المعادلة يجب كتابتها على الشكل (2.1) أي:

$$-y'' = \lambda y$$

أي أن:

$$p(x) = -1, q(x) = r(x) = 0$$

بأخذ  $h = \frac{1}{4}$  فإن عدد المجاهيل يصبح 3 وبالتالي هناك 3 قيم ذاتية يمكن الحصول عليها بطريقة الفروق المركزية كما سبق شرحه وهي:

$$\lambda_1 = 9.37, \lambda_2 = 32, \lambda_3 = 54.6$$

مثال (2.2):

أوجد الحل في المثال (2.1) المناظر للقيمة الذاتية  $\lambda = 32$ .

باستعمال  $h = \frac{1}{4}$  و  $\lambda = 32$  في طريقة الفروق المركزية نحصل على:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \frac{32}{16} y_i = 0$$

أي:

$$y_{i-1} + y_{i+1} = 0$$

له حلول غير الخلل الصفري. وبما أن هذا النظام متجانس، فإن ذلك يعني:

$$\det(B) = \det(A - \lambda I) = 0$$

وتعريف الدالة  $f$  بأنه  $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

فإن إيجاد القيم الذاتية للمصفوفة  $A$  يعني إيجاد جذور الدالة  $f$  وتسمى متعددة الحدود الذاتية للمصفوفة  $A$ ، حيث إن  $f$  هي دالة متعددة الحدود من الدرجة  $n$  عندما تكون  $A$  مصفوفة مربعة ذات  $n$  صف و  $n$  عمود، مع ملاحظة أن الجذور قد لا تكون أرقاماً حقيقية بل مركبة أحياناً (complex)، إلا إذا كانت المصفوفة متماثلة (Symmetric) أي  $(A_{ij} = A_{ji})$  ففي هذه الحالة يمكننا إثبات أن كل القيم الذاتية حقيقية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{مثال (3.1): المصفوفة}$$

لها متعددة الحدود الذاتية:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{bmatrix} \\ = (1-\lambda)(3-\lambda)(10-\lambda)$$

وبالتالي فإن القيم الذاتية هي التي تحقق  $f(\lambda) = 0$ ، أي:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 10$$

المتجه الذاتي الذي يقابل  $\lambda_1$  نحصل عليه من:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي

$$i = 1 \quad y_0 + y_2 = 0$$

$$i = 2 \quad y_1 + y_3 = 0$$

$$i = 3 \quad y_2 + y_4 = 0$$

$$y_0 = y_4 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$$y_1 = -y_3 = c$$

وبما أن القيم الحدية:

فإن الحل هو:

حيث  $c$  مقدار ثابت، أي أن متجه الحل هو

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

لاحظ أن هذا الحل يمثل ما لا نهاية من الحلول لأن  $c$  قيمة غير محددة. ويسمى متجه الحل الناظر لقيمة ذاتية في المعادلة بأنه متجه ذاتي (Eigen-vector). أي أن اختيار  $h = \frac{1}{4}$  في المثال السابق أدى إلى الحصول على 3 قيم تقريبية للقيم الذاتية يقابلها 3 متجهات ذاتية كتقريب للمتجهات الذاتية الصحيحة، أو على الأصح الدوال الذاتية الصحيحة.

### 9.3 القيم الذاتية للمصفوفات

القيم الذاتية للمصفوفة  $A$  هي جميع قيم  $\lambda$  التي تحقق:

$$AY = \lambda Y$$

حيث  $Y$  متجه غير صفري. أي أن النظام الخطي:

$$BY = (A - \lambda I) Y = 0$$

ملاحظات:

(1) المثال السابق يوضح أن القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية كالمصفوفة A في هذا المثال هي نفسها العناصر القطرية.

(2) المتجهات الذاتية لا تتحدد مقداراً ولكن تتحدد اتجاهها فقط.

مثال (3.2):

المطلوب كتابة برنامج لإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة A المتكونة من N صف و N عمود وذلك بإيجاد جذور متعددة الحدود الذاتية، مع افتراض توفر برنامج فرعي لحساب محدد أي مصفوفة، وهو:

SUBROUTINE DET (A, N, D)

حيث D هي محدد المصفوفة A من نوع N×N. بالإمكان افتراض توفر أيضاً برنامج فرعي.

SUBROUTINE SECANT (X0, X1, F, R, N)

الذي يحسب جميع جذور الدالة F في المتجه R باستعمال القيم الابتدائية X1, X0، وذلك بطريقة القاطع. وقد فضلنا هذه الطريقة على طريقة نيوتن لتجنب حساب المشتقة الأولى في طريقة نيوتن لأن ذلك ليس سهلاً بالنسبة للدالة:

$$F(x) = \det(A - xI)$$

```
EXTERNAL F
DIMENSION A (10, 10), R(10), X0(10), X1(10)
READ (*, *) N
DO 10 X = 1, N
  READ (*, *) X0(I), X1(I)
DO 20 I = 1, N
  READ (*, *) (A(I, J), J = 1, N)
CALL SECANT (X0, X1, F, R, N)
WRITE (*, *) (R(I), I = 1, N)
STOP
END
FUNCTION F(X, A, N)
```

أي أن:

$$y_3 = 0, y_2 = 0, y_1 = c_1$$

حيث  $c_1$  مقدار ثابت غير محدد. والمتجه الذي يقابل  $\lambda_2$  هو حل النظام:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$y_3 = 0,$$

$$-2y_1 + 2y_2 = 0$$

$$y_1 = y_2 = c_2 = \text{مقدار ثابت}$$

والمتجه الثالث الذي يقابل  $\lambda_3$  هو حل النظام:

$$\begin{bmatrix} -9 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن بوضع  $y_3 = c_3$  حيث  $c_3$  مقدار غير محدد، نحصل على:

$$-7y_2 + 5y_3 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{5}{7} y_3 = \frac{5}{7} c_3$$

$$-9y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{4}{9} y_3 + \frac{2}{9} y_2$$

$$y_1 = \frac{4}{9} c_3 + \frac{2}{9} \times \frac{5}{7} c_3 = \frac{38}{63} c_3$$

وبالتالي فإن المتجهات الذاتية الثلاثة هي:

$$Y_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 = c_3 \begin{bmatrix} 38/63 \\ 5/7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فإن القيمة هي أكبر قيمة ذاتية (من حيث القيمة المطلقة) للمصفوفة A. وفي الوقت نفسه  $V_1$  تتقارب من المتجه الذاتي المقابل لهذه القيمة المطلقة.

مثال (4.1):

استعمل طريقة القوى لإيجاد أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ابتداءً من المتجه.

الخطوة الأولى هي حساب أكبر عنصر في  $U_0$ ، وهو  $\alpha_0 = 1$  وبالتالي فإن  $U_0 = V_0$ :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\alpha_1 = 8$$

$$V_1 = \frac{1}{\alpha_1} U_1 = \begin{bmatrix} .875 \\ 1 \\ .875 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = AV_1 = \begin{bmatrix} 6.875 \\ 7.375 \\ 6.125 \end{bmatrix}$$

```

DIMENSION A(N, N)
DO 10 I = 1, N
  A(I, I) = A(I, I) - N
CALL DET (A, N, F)
RETURN
END

```

10

ملاحظات:

- (1) قد لا يؤدي البرنامج السابق المطلوب، إذ إن طريقة القاطع ليست مضمونة التقارب.
- (2) قد يتطلب البرنامج وقتاً طويلاً عند التنفيذ نظراً لأن حساب المحددة عملية تستغرق زمناً طويلاً نسبياً.
- (3) لا يؤدي البرنامج إلى حساب القيم الذاتية مركبة (complex).

#### 9.4 طريقة القوى Power Method

تستعمل هذه الطريقة التكرارية لحساب أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة. وتتلخص في الخطوات التالية:

- 1 - إبدأ بمتجه ابتدائي (غير صفري)  $U_0$ .
- 2 - أحسب  $\alpha_0$  أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة في  $U_0$ .
- 3 - أحسب المتجه  $V_0 = U_0 / \alpha_0$ .
- 4 - لجميع قيم  $i = 1, 2, 3, \dots$  أحسب:

$$U_i = AV_{i-1}$$

$$V_i = U_i / \alpha_i$$

حيث  $\alpha_i$  هي أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة في  $U_i$ .  
توقف في حالة أن  $\alpha_i$  تتقارب من قيمة محددة أي عندما  $|\alpha_i - \alpha_{i-1}| < \epsilon$

ملاحظة:

يُوصف المتجه الذاتي الذي يكون أكبر عنصر فيه هو الواحد الصحيح بأنه متجه ذاتي قياسي. لاحظ أن متجه الذاتي يساوي المتجه الذاتي القياسي مضروباً في مقدار ثابت.

مبرهنة:

إذا كان للمصفوفة A قيم ذاتية  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  بحيث  $\lambda_1$  هي أكبر من حيث القيمة المطلقة من باقي القيم الذاتية (ولا تساوي واحدة منها) فإن  $\alpha_1$  في طريقة القوى تتحول إلى  $\lambda_1$ .

مثال (4.2):

استعمل طريقة القوى في كتابة برنامج فرعي لحساب أكبر قيمة ذاتية لمصفوفة A من نوع  $N \times N$  بحيث لا يزيد عدد الدورات عن MAX وتعتبر  $\alpha_1$  هي القيمة التقريبية للقيمة الذاتية الكبرى عندما:

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \text{EPS}$$

اعتبر أن EIGEN هو متجه ذاتي (ابتدائي عند الإدخال ونهائي عند الإخراج).

```

SUBROUTINE POWER (A, N, EIGEN, ALPHA, MAX, EPS, ITE)
  DIMENSION A (N, N), ELGEN (N), TEMP (N)
  OLD = 0
  DO 100 ITE = 1, MAX
    ALPHA = 0
    DO 10 J = 1, N
      IF (ABS (EIGEN (J)). GT. ALPHA) ALPHA = EIGEN (J)
    CONTINUE
    DO 20 J = 1, N
      EIGEN (J) = EIGEN (J) / ALPHA
    IF (ABS (ALPHA - OLD). LT. EPS) RETURN
    DO 40 I = 1, N

```

221

$$\alpha_2 = 7.375$$

إذن:

$$V_2 = \frac{1}{\alpha_2} U_2 = \begin{bmatrix} .9322 \\ 1 \\ .8305 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = AV_2 = \begin{bmatrix} 6.254 \\ 7.1525 \\ 5.813 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = 7.1525$$

أي:

$$V_3 = \frac{1}{\alpha_3} U_3 = \begin{bmatrix} .8744 \\ 1 \\ .8127 \end{bmatrix}$$

$$U_4 = AV_3 = \begin{bmatrix} 6.1252 \\ 7.0635 \\ 5.6889 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_4 = 7.0635$$

$$V_4 = \frac{1}{\alpha_4} U_4 = \begin{bmatrix} .8672 \\ 1 \\ .8052 \end{bmatrix}$$

لو نستمر في هذه العملية التكرارية فلن  $\alpha_1$  ستؤول إلى القيمة 7، وتتؤول  $V_1$  إلى المتجه الذاتي المناظر لهذه القيمة، أي:

$$\alpha_1 \rightarrow 7$$

$$V_1 \rightarrow \begin{bmatrix} .8666 \\ 1 \\ .8 \end{bmatrix}$$

220

## تمارين (1)

1- هل يوجد حل غير صفري للمسألة الحدية :

$$y'' - y = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$$

2- أوجد قيمة تقريبية للقيم الذاتية للمسألة :

$$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(1) = 0$$

بإستعمال الفروق المركزية مع أخذ  $h = \frac{1}{3}$ . أوجد أيضاً المتجهات الذاتية المناظرة لهذه القيم.

3- أعد حل تمرين (2) مستبدلاً الشرط الحدي  $y(0) = 0$  بالشرط :

$$y'(0) = 0$$

مع إمكانية تقريب هذه المشتقة بالفروق المتقدم. قارن مع الحل الصحيح.

4- أكتب البرنامج الفرعي :

SUBROUTINE EIGEN (P, Q, R, N, ALAMDA, X0, X1)

الذي يوجد القيم الذاتية التقريبية ALAMDA وعددها N للمسألة الحدية الذاتية :

$$PY'' + QY' + RY = \lambda Y$$

$$Y(0) = 0, Y(1) = 0$$

وذلك بحل المعادلة الذاتية بطريقة القاطع مع معلومية قيمتين تقريبيتين للقيمة الذاتية ALAMDA وهما X0, X1، ومعلومية الدوال R, Q, P.

5- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

وذلك بطريقة حل المعادلة الذاتية.

```
TEMP(I) = 0
DO 40 J = 1, N
TEMP(I) = TEMP(I) + A(I, J) * EIGEN(J)
DO 50 K = 1, N
EIGEN(K) = TEMP(K)
100 OLD = ALPHA
RETURN
END
```

للحصول على تقريب للقيم الذاتية  $\lambda$  لمصفوفة A، يمكن استعمال مبرهنة جرشغورن (Gerschgorin)، ومفادها أن  $\lambda$  تقع في إحدى الفترات التالية :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

حيث  $i$  لها القيم 1، 2، ....، n، (لاحظ أن هذه الفترات تعتبر دوائر إذا كانت  $\lambda$  قيمة مركبة). وإذا كانت إحدى هذه الفترات (أو الدوائر) غير متصلة بالفترات الأخرى، فإنها لا بد أن تحتوي على قيمة ذاتية.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

مثال (4.3) : المصفوفة

مصفوفة متباعدة وبالتالي فإن قيمها الذاتية حقيقية والفترات التي تحتوي على

هذه القيم هي :

$$|\lambda - 3| \leq 1$$

$$|\lambda - 2| \leq 2$$

$$|\lambda + 4| \leq 1$$

لاحظ أن الفترة الثالثة غير متصلة بالفترتين الأخريين وبالتالي فهي تحتوي على قيمة ذاتية، أما الفترة الثانية فهي تحتوي على الفترة الأولى وبالتالي فهي تحتوي على قيمتين ذاتيتين.

## طريقة المربعات الصغرى Least Square Method

### 10.1 مقدمة

نفترض أن لدينا النقط  $(x_i, y_i)$  التالية :

x	-2	-1	0	1	2
y	-3.1	-9	1	3.2	4.8

والمطلوب معرفة أي من الدوال التالية تمثل العلاقة بين  $x$  و  $y$  تمثيلاً أفضل من الدوال الأخرى :

$$p_1(x) = 1.1 + 1.8x$$

$$p_2(x) = 1.0 + 1.99x$$

$$p_3(x) = 0.9 + 2.0x$$

لمعرفة ذلك نحسب قيم  $p_k(x)$  عند النقط المذكورة  $x$ ، ونحسب الفرق  $e_k(x)$  بين القيمة الصحيحة  $y$  والقيمة التقديرية  $p_k(x)$ ، أي أن :

$$e_k(x) = y_k(x) - p_k(x), k = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

6 - أوجد أكبر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المناظر لها في المصفوفة  $A$  في تمرين (5) بطريقة القوى.

7 - (أ) أثبت أن  $\lambda^2$  هي قيمة ذاتية للمصفوفة  $A^2$  (أي  $A \cdot A$ ) إذا كانت  $\lambda$  قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$ .

(ب) أثبت أن المتجهات الذاتية للمصفوفة  $A$  هي نفسها المتجهات الذاتية للمصفوفة  $A^2$ .

8 - أثبت أن  $\frac{1}{\lambda}$  هي قيمة ذاتية للمعكوس  $A^{-1}$  إذا كانت  $\lambda$  قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$ . أيضاً أثبت أن المتجه الذاتي للمصفوفة  $A$  هو نفسه للمصفوفة  $A^{-1}$ .

9 - إذا كانت  $\lambda_i$  قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$ ، أثبت أن  $p_i = 1/(\lambda_i - q)$  هي قيمة ذاتية للمصفوفة  $(A - qI)^{-1}$  حيث  $q$  قيمة ثابتة.

10 - طريقة القوى للمعكوس تعتمد على إجراء طريقة الأس على المصفوفة  $(A - qI)^{-1}$  بدلاً من المصفوفة  $A$  حيث  $q$  هي قيمة تقريبية للقيمة الذاتية للمصفوفة  $A$ . لماذا تؤدي مثل هذه الطريقة إلى تقارب أسرع؟

11 - طبق طريقة القوى للمعكوس المبينة في تمرين (10) على المصفوفة  $A$  في تمرين (5) مع أخذ  $q = 10$ .

12 - طبق نظرية جرشغورون على المصفوفة  $A$  في تمرين (5). لتحديد المدى الذي تقع فيه كل قيمة ذاتية.

13 - هناك صيغ كثيرة لطريقة القوى منها ما يلي :

$$U_n = A^n U_0$$

إذا كان  $U_0$  هو المتجه الابتدائي، وكان :

فإن متوسط نسب عناصر  $U_{n+1}$  إلى عناصر  $U_n$  تؤول إلى أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$  عندما تسعى  $n$  إلى ما لا نهاية. اكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة.



ومن ذلك نرى أن  $E_2$  هو أقل مقداراً من  $E_1$  وعلى ذلك فإن  $p_2(x)$  هي أفضل (أي أقل خطأ) من  $p_1(x)$  و  $p_3(x)$ ، ولكن يجب ملاحظة أن المعيار الإقليدي ليس هو المعيار الوحيد لمقدار المتجه، وقد تختلف الإجابة على أفضلية تمثيل على آخر باختلاف نوع المعيار المستعمل في قياس مقدار المتجه.

#### 10.2 خط المربعات الصغرى (Least Square Line)

إذا كان لدينا مجموعة من النقاط:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$$

فهل بالإمكان إيجاد متعددة الحدود من المرتبة الأولى:

(2.1)

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

بحيث يكون متجه الخطأ:

(2.2)

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_m \end{bmatrix}$$

(2.3)

$$e_i = y_i - p(x_i)$$

ذا حد أدنى من حيث المقدار؟ ذلك يعني أننا نريد تقليل الكمية:

(2.4)

$$\|E\|_2 = \left[ \sum_{i=1}^m (y_i - p(x_i))^2 \right]^{1/2}$$

وذلك يكافئ إيجاد الحد الأدنى لمربع  $\|E\|_2$  باختيار قيم  $a_0$  و  $a_1$  مناسبة. وبما أن  $\|E\|_2$  يعتمد على  $a_0$  و  $a_1$ ، أي:

(2.5)

$$\|E\|_2^2 = f(a_0, a_1)$$

والجدول (1.1) يبين هذه الحسابات.

x	y(x)	$p_1(x)$	$e_1(x)$	$p_2(x)$	$e_2(x)$	$p_3(x)$	$e_3(x)$
-2	-3.1	-2.5	-.6	-2.98	-.12	-3.1	0
-1	-.9	-.7	-.2	-.99	.09	-1.1	.2
0	1	1.1	-.1	1.0	0	.9	.1
1	3.2	2.9	.3	2.99	.21	2.9	.3
2	4.8	4.7	.1	4.98	-.18	4.9	-.1

جدول (1.1)

وبالتالي لكل  $p_k(x)$  يوجد متجه (متجه الخطأ) بحيث:

$$E_1 = \begin{bmatrix} -.6 \\ -.2 \\ -.1 \\ .3 \\ .1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} -.12 \\ .09 \\ 0 \\ .21 \\ -.18 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ .2 \\ .1 \\ .3 \\ -.1 \end{bmatrix}$$

وللمقارنة بين هذه المتجهات من حيث المقدار، نستعمل إحدى الطرق المعروفة في قياس طول المتجه وهو ما يعرف باسم معيار Norm. فإذا استعملنا المعيار الإقليدي (Euclidean) الذي نرمز له بالرمز  $\|E\|_2$  فإن:

$$\|E_1\|_2 = [(-.6)^2 + (-.2)^2 + (-.1)^2 + (.3)^2 + (.1)^2]^{1/2} = 0.714$$

$$\|E_2\|_2 = [(-.12)^2 + (.09)^2 + 0^2 + (.21)^2 + (-.18)^2]^{1/2} = .315$$

$$\|E_3\|_2 = [0^2 + (.2)^2 + (.1)^2 + (.3)^2 + (-.1)^2]^{1/2} = .387$$

لإيجاد معادلة أخرى إلى جانب (2.8) نجري التفاضل الجزئي بالنسبة إلى  $a_1$  لنحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_1} &= 0 \\ 2 \sum [y_i - a_0 - a_1 x_i] (-x_i) &= 0 \\ \sum x_i y_i - a_0 \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 &= 0 \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned} \quad (2.13)$$

نلاحظ أيضاً أن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} = 2 \sum x_i^2 > 0$$

وهذا يعني أن القيمة القصوى المتحصل عليها هي حد أدنى وليس أعلى. المعادلتان (2.8) و (2.13) يمكن كتابتهما على الشكل:

$$(2.14) \quad \begin{bmatrix} m & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

حيث أهمل الدليل  $i$  لغرض التسهيل في الكتابة. إذن بالإمكان إيجاد  $a_0$  و  $a_1$  طالما أن المحددة ليست صفراً، أي:

$$(2.15) \quad m \sum x^2 - (\sum x)^2 \neq 0$$

لنحصل على:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y & \sum x \\ \sum xy & \sum x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix}}$$

حيث  $f$  دالة تتحدد من (2.4) و (2.1)، فإن الحد الأدنى يحدث عندما:

$$(2.6) \quad \frac{\partial f}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2} > 0$$

وهذا يعني (من (2.4), (2.5)) أن:

$$2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_0 - a_1 x_i) (-1) = 0$$

أي:

$$(2.7) \quad \sum y_i - a_0 \sum 1 - a_1 \sum x_i = 0$$

حيث  $\sum$  تعني الجمع بالدليل  $i$  من 1 إلى  $m$ . إذن:

$$(2.8) \quad ma_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$

لاحظ أن:

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2} = 2 \sum 1 = 2m > 0$$

أي أن الخطأ هو حد أدنى وليس أقصى. لاحظ أيضاً أن (2.8) يمكن كتابتها على الشكل:

$$(2.10) \quad a_0 + a_1 \bar{x} = \bar{y}$$

حيث  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}$  هي المتوسطات لكل من قيم  $y_i$  و  $x_i$  على التوالي، أي أن:

$$(2.11) \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum x_i$$

و:

$$(2.12) \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum y_i$$

بالتعويض في (2.14)، نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 19.9 \end{bmatrix}$$

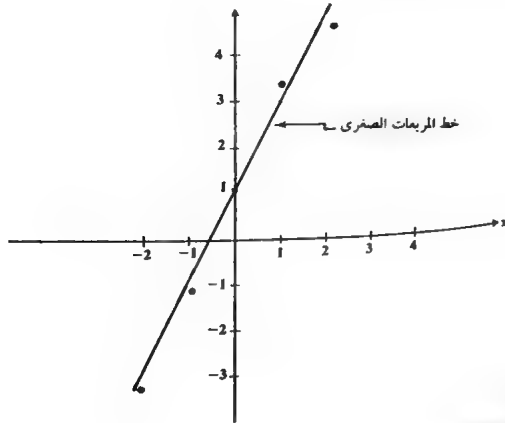
ومنها:

$$a_0 = 1, a_1 = 1.99$$

وبالتالي فإن متعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(x) = 1 + 1.99x$$

هي أفضل خط مستقيم لتمثيل البيانات المعطاة (وهذا يبين السبب في أن  $p_2(x)$  في مقدمة هذا الفصل كانت الأقل خطأ من بقية الدوال) والشكل (2.1) يبين هذا الخط والنقط.



شكل (2.1)

(2.16)

$$a_0 = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{m \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

وبالطريقة نفسها نحصل على:

$$a_1 = \frac{m \sum xy - \sum y \sum x}{m \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

أو من (2.10):

(2.17)

$$a_1 = (\bar{y} - a_0) / \bar{x}$$

مثال (2.1):

أحسب معاملات متعددة الحدود من الدرجة الأولى في طريقة المربعات الصغرى للبيانات التالية:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3.1	-0.9	1.0	3.2	4.8

لحساب  $\sum xy$ ,  $\sum x^2$ ,  $\sum x$  نكون الجدول التالي:

x	y	$x^2$	xy
-2	-3.1	4	6.2
-1	-0.9	1	.9
0	1.0	0	0
1	3.2	1	3.2
2	4.8	4	9.6
0	5	10	19.9
			المجموع

نلاحظ هنا أننا لو أخذنا  $x$  على أنها السنة فإن ذلك يجعل الأرقام في المعادلات كبيرة جداً، ولذلك يفضل أن نعرف  $x$  على أنها السنة مطروحاً منها 1987 ونعرف  $y$  بعدد السكان، ونكون الجدول التالي:

x	y	x <sup>2</sup>	xy
-1	2.10	1	-2.10
0	2.15	0	0
1	2.23	1	2.23
0	6.48	2	0.13
المجموع			

وبالتالي فإن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.48 \\ 0.13 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 2.16 \quad a_1 = .065$$

لتقدير عدد السكان في سنة ما ولتكن مثلاً 1989 نحسب:

$$x = 1989 - 1987 = 2$$

$$p(2) = 2.16 + .065(2) = 2.29$$

أي نتنبأ بعدد السكان في سنة 1989 بأن يكون 2.29 مليون.

ملاحظة:

نلاحظ أن اختيار  $x$  بحيث نجعل:

$$\sum x = 0$$

### مثال (2.2):

اكتب برنامجاً لحساب معاملات متعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

لتمثيل النقط  $(x_i, y_i)$  وعددها  $m$  بطريقة المربعات الصغرى.

```

DIMENSION X(100), Y(100)
READ (*, *) M
DO 10 I = 1, M
  READ (*, *) X(I), Y(I)
  SX = 0
  SXY = 0
  SXX = 0
  SY = 0
DO 20 I = 1, M
  SX = SX + X(I)
  SXX = SXX + X(I) * X(I)
  SXY = SXY + X(I) * Y(I)
  SY = SY + Y(I)
D = M * SXX - SX * SX
AO = (SXX * SY - SX * SXY) / D
A1 = (M * SXY - SX * SY) / D
WRITE (*, *) AO, A1
STOP
END

```

### مثال (2.3):

إذا كانت لدينا البيانات التالية عن عدد السكان في بلد ما بالملايين، تنبأ بعدد السكان في هذا البلد سنة 1989

السنة	1986	1987	1988
عدد السكان	2.1	2.15	2.23

بتعريف  $u$  و  $v$  كما في (3.3)، نكون الجدول (3.1).

x	y	u	v	$u^2$	uv
1	2	0	0.693	0	0
2	3	.693	1.10	.480	.762
3	3.5	1.10	1.25	1.21	1.38
4	4	1.39	1.39	1.93	1.93
المجموع		3.18	4.43	3.62	4.07

وبالتالي فإن:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3.18 \\ 3.18 & 3.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.43 \\ 4.07 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$$A = \ell n a = .715$$

$$b = .492$$

$$a = e^A = 2.04$$

$$p(x) = 2.04 x^{.492}$$

وبالتالي فإن:

ملاحظة:

للمقارنة بين  $p(x_i)$  والقيم  $y_i$ ، نكون الجدول (3.2) مع الرسم البياني (شكل 3.1).

x	y	p(x)
1	2	2.04
2	3	2.87
3	3.5	3.5
4	4	4.04

جدول (3.2)

يجعل الحل سهلاً، وهذا يتحقق بأخذ:  $x = t - \bar{t}$

حيث تمثل  $\bar{t}$  متوسط القيم  $t$  (المتغير المستقل). في المثال السابق قيم  $t$  هي السنوات المعطاة و  $\bar{t}$  هي 1987.

### 10.3 طريقة المربعات الصغرى لعلاقات غير خطية

بالإمكان استعمال طريقة المربعات الصغرى في العلاقات غير الخطية. فمثلاً الدالة:

$$y = a x^b$$

(3.1)

يمكن تحويلها إلى علاقة خطية بأخذ اللوغاريتم للطرفين، أي:

(3.2)

$$\ell n y = \ell n a + b \ell n x$$

وبتعريف:

(3.3)

$$u = \ell n x$$

$$v = \ell n y$$

تصبح (3.2) على الشكل الخطي:

$$v = \ell n a + bu$$

مثال (3.1):

أوجد  $a$  و  $b$  بطريقة المربعات الصغرى حيث:  $p(x) = ax^b$

لتمثيل البيانات التالية:

x	1	2	3	4
y	2	3	3.5	4

مثال (3.2): افترض أن عدد الطلبة في كلية العلوم في السنوات الأربع الماضية يزداد على النحو التالي:  
 $S = ae^{bY}$

حيث  $S$  تمثل عدد الطلبة و  $Y$  تمثل رقم السنة والبيانات هي:

Y	1	2	3	4
S	990	1240	1570	1970

قدر عدد الطلبة في السنة القادمة ( $Y = 5$ ).

أولاً نحول العلاقة إلى الشكل الخطي:

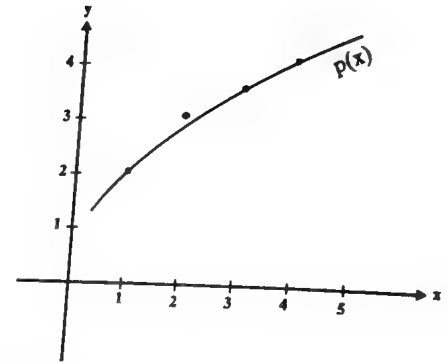
$$v = \ln S, A = \ln a + \bar{Y} \cdot b$$

$$u = Y - \bar{Y}$$

والغرض من تعريف  $u$  على هذا النحو طبعاً الحصول على:  $\sum u = 0$   
 ومن الجدول (3.3) (لاحظ أن  $\bar{Y} = 2.5$ )

Y	U	S	v	uv	u <sup>2</sup>
1	-1.5	990	6.90	-10.35	2.25
2	-.5	1240	7.12	-3.56	.25
3	.5	1570	7.36	3.68	.25
4	1.5	1970	7.58	11.37	2.25
	0		18.96	1.14	5

جدول (3.3)



شكل (3.1)

هناك عدة أشكال غير خطية التي يمكن إيجاد معاملاتها بطريقة المربعات الصغرى، فمثلاً:

أ، العلاقة:

$$y = ae^{bx}$$

$$v = \ln y$$

نستعمل هنا التحويل:

$$v = A + bx$$

فتصبح العلاقة على الشكل الخطي:

$$A = \ln a$$

حيث:

ب، العلاقة:

$$y = a + be^x$$

$$u = e^x$$

$$y = a + bu$$

نستعمل هنا التحويل:

فتصبح العلاقة على النحو:

### تمارين (1)

1- بين أي من الدوال التالية يمثل النقاط التالية أفضل تمثيل باستعمال معيار اقليدس:

$$p_1(x) = 4.1 + 2.2x - 4.8x^2$$

$$p_2(x) = 3.9 + 2x - 5.1x^2$$

$$p_3(x) = 4.5 + 2.1x - 5x^2$$

x	y
0	4
1	1
2	-12
3	-36

2- أوجد خط المربعات الصغرى للبيانات في تمرين (1).

3- أوجد خط المربعات الصغرى للبيانات التالية:

x	67	70	73
y	476	496	526

أ- بدون تحويل للمتغيرات.

ب- باستعمال التحويل:

$$t = (x - 70)/3$$

$$z = (y - 496)/10$$

ج- وضح بالرسم الخط والنقط في المحورين t و z.

د- أحسب مقدار متجه الخط  $\|E\|_2$ .

هـ- أوجد خط المربعات الصغرى بتغير القيمة 526 إلى 516 بين لماذا يساوي الخط في هذه الحالة صفراً؟

4- بين أن خط المربعات الصغرى للنقطتين  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  هو نفسه خط الاستكمال.

نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.96 \\ 1.14 \end{bmatrix}$$

$$A = 7.24$$

$$b = .228$$

$$A = \ell n a + 2.5 b = \ell n a + 2.5 (.228)$$

$$= 7.24$$

$$\ell n a = 6.67, a = e^{6.67} = 788$$

$$S = 788e^{.228(5)} = 2463$$

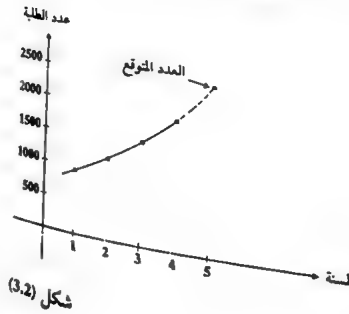
أي أن:

وبالتالي:

إذن فإن عدد الطلبة المتوقع في السنة القادمة هو:  $S = 788e^{.228(5)} = 2463$

ملاحظة:

للمقارنة بين القيم المعطاة S والقيم المقدرة  $\bar{S}$  نكون الجدول (3.4) والرسم البياني في شكل (3.2).



Y	S	$\bar{S}$
1	990	990
2	1240	1243
3	1570	1561
4	1970	1961
5	?	2463

شكل (3.2)

5- إذا كانت  $p(x) = a_0 + a_1x$  تمثل خط المربعات الصغرى، أثبت أن:

$$a_1 = \frac{\sum (x - \bar{x}) y}{\sum (x - \bar{x})^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

حيث  $\bar{x}$ ،  $\bar{y}$  المتوسطان للقيم  $x_i$  و  $y_i$  على التوالي.

(ب) أكتب برنامجاً يقرأ عدداً من النقط  $(x_i, y_i)$  ويحسب  $a_0$  و  $a_1$  كما في

6- أكتب برنامجاً لحساب  $a$  و  $b$  و  $p(x_i)$  لقيم  $i$  من 1 إلى  $m$  حيث:

$$p(x) = ax^b$$

تمثل دالة المربعات الصغرى للنقط  $(x_i, y_i)$  وعددها  $m$ .

7- أوجد تقريباً للدالة  $\cos(x)$  على الشكل:

$$p(x) = a_0 + a_1 x^2$$

$$\cos(0) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

8- أوجد  $a$  و  $b$  لتمثيل البيانات التالية على الصورة  $ax^b$

x	1	2	3	4
y	3	12	25	50

9- أكتب البرنامج الفرعي SUBROUTINE LSL (X, Y, M, YC, EN) قارن بين هذه البيانات وبيانات المربعات الصغرى بالرسم.

الذي يحسب YC من خط المربعات الصغرى للنقاط:

$$X(I), Y(I) \quad I = 1, 2, \dots, M$$

$$YC(I) = P(X(I)) \quad \text{حيث:}$$

و  $P(X)$  هي الدالة الخطية للمربعات الصغرى، كما يحسب البرنامج EN مقدار الخطأ بمقياس إقليدس

10.4 متعددة الحدود من الدرجة  $n$

لإيجاد متعددة حدود المربعات الصغرى من الدرجة  $n$ :

$$(4.1) \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

نعرف دالة الخطأ:

$$(4.2) \quad f(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m [y_i - p(x_i)]^2$$

ولكي تكون هذه الدالة ذات قيمة صغرى، نجعل:

$$(4.3) \quad \frac{\partial f}{\partial a_0} = \frac{\partial f}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

ومنها نحصل على النظام الخطي:

$$(4.4) \quad \begin{bmatrix} m & \sum x & \sum x^2 & \dots & \sum x^n \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \dots & \sum x^{n+1} \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \dots & \sum x^{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x^n & \sum x^{n+1} & \dots & \dots & \sum x^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2y \\ \dots \\ \sum x^ny \end{bmatrix}$$



وبالإمكان كتابة هذا النظام الخطي (الذي يعرف عادة بالمعادلات القياسية Normal equations) على النحو:

$$SA = B$$

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^m x_k^{i+j-2}$$

$$B_i = \sum_{k=1}^m x_k^{i-1} y_k$$

حيث:

والمتجه A هو متجه المعاملات  $a_i$ . لاحظ أن S مصفوفة متماثلة.

وبوضع  $n = 2$  في النظام (3.4) فإن:

$$\begin{bmatrix} m & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2 y \end{bmatrix}$$

وبالتعويض من الجدول في هذا النظام الخطي، وبعد الحل، يكون:

$$b_0 = 197.9 \quad b_1 = -59 \quad b_2 = -16.42$$

إذن:

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$p(t) = b_0 + b_1 (t - \bar{t}) + b_2 (t - \bar{t})^2$$

$$= (b_0 - b_1 \bar{t} + b_2 \bar{t}^2) + (b_1 - 2\bar{t} b_2) t + b_2 t^2$$

$$= 250 + 6.7t - 16.42 t^2$$

مثال (4.1):

يتحرك جسيم بحيث تتغير المسافة y بالنسبة للزمن t على النحو:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

والجدول التالي يبين قياسات تم أخذها:

t	0	1	2	3	4
y	250	240	200	120	15

أوجد p(t) باستعمال طريقة المربعات الصغرى.

دع  $x = t - \bar{t}$  حيث  $\bar{t} = 2$  وتكون الجدول التالي:

t	x	x <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	x <sup>4</sup>	y	xy	x <sup>2</sup> y
0	-2	4	-8	16	250	-500	1000
1	-1	1	-1	1	240	-240	240
2	0	0	0	0	200	0	0
3	1	1	1	1	120	120	120
4	2	4	8	16	15	30	60
	0	10	0	34	825	-590	1420

مثال (4.2):  
أكتب البرنامج الفرعي:  
SUBROUTINE LSQ (X, Y, M, C, N, EPS, IFLAG)

لحساب C معاملات متعددة حدود المربعات الصغرى للنقط (X, Y) وعددها M، حيث M أكبر من درجة متعددة الحدود (N - 1) وحيث N هو عدد المعاملات A. إذا كان المؤشر IFLAG صفراً عند الإخراج فذلك يعني عدم التوصل إلى حل للنظام الخطي نظراً لأن المحددة أقل من العدد الصغرى EPS.

$$\sum_{i=1}^n x(i) = \sum_{i=1}^n x_i^i \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

لولا، نعرف كلاً من:

```

ENDIF
DO 60 J = 1, N
IF (I + J .EQ. 2) THEN
    S(I, J) = M
ELSE
    S(I, J) = SUM X (I + J - 2)
ENDIF
CONTINUE
CONTINUE
DO 222 I = 1, N
WRITE (*, *) (S (I, J), J = 1, N), B (I)
CALL GEM (S, B, N, C, EPS, IFLAG)
RETURN
END

```

60  
100  
222

### 10.5 طريقة المربعات الصغرى بدوال محددة

بدلاً من متعددة الحدود (4.1) بالإمكان استعمال دالة على الصورة:

$$(5.1) \quad p(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_n g_n(x)$$

حيث الدوال  $g_j(x)$  دوال معلومة وحيث:

$$(5.2) \quad e = \|E\|_2^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - p(x_i)]^2$$

ذا قيمة صغرى. وبوضع:

$$(5.3) \quad \frac{\partial e}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n$$

نحصل على:

$$(5.4) \quad \sum_{i=1}^m 2 [y_i - p(x_i)] (-g_j(x_i)) = 0$$

أو:

$$(5.5) \quad \sum_{i=1}^m p(x_i) g_j(x_i) = \sum_{i=1}^m y_i g_j(x_i)$$

$$j = 0, 1, \dots, n$$

$$\text{sumy}(i) = \sum_{k=1}^m x_k^i y_k$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

وبالتالي فإن:

$$S_{ij} = \begin{cases} m & i = j = 1 \\ \text{sumx}(i + j - 2) & i + j > 2 \end{cases}$$

$$B_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^m y_k & i = 1 \\ \text{sumy}(i - 1) & i > 1 \end{cases}$$

بعد تكوين المصفوفة S والمتجه B في النظام الخطي (4.4)، نستدعي البرنامج GEM في الفصل الثالث لحل هذا النظام.

```

C  LEAST SQUARE POLYNOMIAL.....
SUBROUTINE LSQ (X, Y, M, C, N, EPS, IFLAG, S, SUMX, SUMY, B)
DIMENSION X(M), Y(M), C(N), SUMX(10), SUMY(N), S(N, N), B(N)
DO 10 I = 1, (N - 1) * 2
SUMX(I) = 0
C
DO 20 K = 1, M
SUMX(I) = SUMX(I) + X(K) ** I
20 CONTINUE
CONTINUE
DO 30 I = 1, N - 1
SUMY(I) = 0
40 DO 40 K = 1, M
SUMY(I) = SUMY(I) + Y(K) * X(K) ** I
30 CONTINUE
DO 100 I = 1, N
IF (I .EQ. 1) THEN
    B(I) = 0
    DO 50 K = 1, M
        B(I) = B(I) + Y(K)
    ELSE
        B(I) = SUMY(I - 1)
50

```

(U, V) = 0 فإذا كانت:

نقول إن المتجهين U و V متعامدان orthogonal.

مثال (5.1):

أوجد دالة المربعات الصغرى على الصورة:

$$p(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x)$$

لليانات التالية:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$
y	1	-0.6	3	5.4	1

نلاحظ هنا أن:

$$g_0(x) = 1, g_1(x) = \sin(x), g_2(x) = \sin(2x)$$

لحساب الجداء الداخلي اللازم، نكوّن الجدول (5.1)

x	y	$g_0(x)$	$g_1^2(x)$	$g_2(x)$	$g_2^2(x)$	$g_1(x)g_2(x)$	$yg_1(x)$	$yg_2(x)$
0	1	1	0	0	0	0	0	0
$\pi/4$	-0.6	$1/\sqrt{2}$	1/2	1	1	$1/\sqrt{2}$	$-0.6/\sqrt{2}$	-0.6
$\pi/2$	3	1	1	0	0	0	3	0
$3\pi/4$	5.4	$1/\sqrt{2}$	1/2	-1	1	$-1/\sqrt{2}$	$5.4/\sqrt{2}$	-5.4
$\pi$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\Sigma$	9.8	$1+\sqrt{2}$	2	0	2	0	6.39	-6

جدول (5.1)

المعادلات (5.5) تصف نظاماً خطياً كما يلي:

$$(5.6) \begin{bmatrix} (G_0, G_0) & (G_0, G_1) & \dots & (G_0, G_n) \\ (G_1, G_0) & (G_1, G_1) & \dots & (G_1, G_n) \\ (G_2, G_0) & (G_2, G_1) & \dots & (G_2, G_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (G_n, G_0) & (G_n, G_1) & \dots & (G_n, G_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_0, Y) \\ (G_1, Y) \\ (G_2, Y) \\ \dots \\ (G_n, Y) \end{bmatrix}$$

حيث:

$$(5.7) G_i = \begin{bmatrix} g_i(x_1) \\ g_i(x_2) \\ \dots \\ g_i(x_m) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

و:

$$(5.8)$$

$$(G_i, G_j) = \sum_{k=1}^m g_i(x_k) g_j(x_k)$$

$$(5.9)$$

$$(G_i, Y) = \sum_{k=1}^m g_i(x_k) y_k$$

$$(5.10)$$

ويسمى بالجداء الداخلي (Inner Product) المتفرق (discrete). أي أن الجداء الداخلي المتفرق لمتجهين U و V هو:

$$(U, V) = \sum_{k=1}^m u_k v_k$$

حيث:

$$(5.11)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix}$$

ومن (5.6) نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.41 & 0 \\ 2.41 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 6.39 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ومن الحل، نجد أن :

$$a_0 = 1, a_1 = 1.99, a_2 = -3$$

أي أن الدالة المطلوبة هي :

$$p(x) = 1 + 1.99 \sin(x) - 3 \sin(2x)$$

ملاحظة :

لاحظ أن (في المثال السابق) المتجهين :

$$G_1 = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \\ \sin(x_2) \\ \sin(x_3) \\ \sin(x_4) \\ \sin(x_5) \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} \sin(2x_1) \\ \sin(2x_2) \\ \sin(2x_3) \\ \sin(2x_4) \\ \sin(2x_5) \end{bmatrix}$$

متعامدان .

## تمارين (2)

1 - أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية بطريقة المربعات الصغرى للدالة  $f(x)$  حيث :

$$f(0) = 1, f(.25) = 1.284, f(.5) = 1.649, f(.75) = 2.117, f(1) = 2.718$$

(ب) ملاحظة أن هذه القيم مأخوذة من الدالة الأسية  $f(x) = e^x$  أوجد

تقريباً للقيمة  $f(.3)$  من «أ» وقارن بالقيمة الصحيحة .

2 - إذا كان عدد أعضاء هيئة التدريس في الجامعة يزداد على النحو التالي :

السنة	1984	1985	1986	1987	1988
العدد	200	215	300	370	400

استعمل طريقة المربعات الصغرى بمتعددة الحدود من الدرجة الثانية لتقدير العدد في سنة 1989 .

3 - أكتب برنامجاً للقيام بالحسابات في تمرين (2) . استعمل البرنامج الفرعي LSQ .

4 - أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية على الصورة :

$$p(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)$$

حيث :

$$g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = 2x^2 - 1$$

وذلك بتطبيق طريقة المربعات الصغرى على البيانات التالية :

x	-1	-.5	0	.5	1
y	6	3.75	2	.75	0

5 - إذا كانت المتجهات  $G_i$  المعرفة في (5.7) متعامدة لجميع قيم  $i$  من  $i = 0$  إلى  $i = n$  فاثبت أن المعاملات :

$$a_i = (G_i, Y) / \|G_i\|_2^2$$

6 - إذا كانت الدوال  $g_i(x)$  قد تم اختيارها بحيث كانت المتجهات  $G_i$  (ب) من

الصفر إلى  $n$ ) متعامدة، فاكتب برنامجاً فرعياً لحساب المعاملات  $a_i$  في (5.1)

7 - أكتب برنامجاً لحساب  $(G_1, G_2)$  جميع قيم  $i$  و  $j$  من 1 إلى  $n$  حيث  $G_i$  هو المنتج المتكون من العناصر

$$g_i(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{M}\right) \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

وبين عملياً أن هذه المنحنيات متعامدة

8 - بناء على الساتح في تمريني (5) و (6) اكتب برنامجاً لحساب  $a_i$  في دالة المربعات الصغرى:

$$p(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x)$$

$$g_i(x) = \sin(2\pi x/M)$$

حيث:

$$(x_k, y_k) \quad k = 1, 2, \dots, M-1$$

للنقط:

$$x_k = k$$

حيث:

## 10.6 طريقة المربعات الصغرى في حل المسائل الحدية

(6.1)

نعود الآن للمسألة الحدية الخطية (3.7) من الفصل التاسع:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

ونحاول الحصول على متعددة الحدود من الدرجة  $n$  لتقريب الحل وذلك

$$z(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

(6.2)

بحيث:

$$(6.3) \quad z(a) = y_a, \quad z(b) = y_b$$

كما نعرف الدالة

$$(6.4) \quad w(x) = z'' + p(x)z' + q(x)z$$

إذا كانت  $z$  قريبة من  $y$  فذلك يعني أن  $w(x)$  قريبة من  $r(x)$ . وبالتالي تستعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد  $z$  بحيث تكون الدالة  $w(x)$  أقرب ما تكون للدالة  $r(x)$  تعبيراً جبرياً، بدعوى متجهين:

$$(6.5) \quad W = \begin{bmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ \vdots \\ w(x_m) \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r(x_1) \\ r(x_2) \\ \vdots \\ r(x_m) \end{bmatrix}$$

بإذن المطلوب هو

$$W - R = 0$$

(6.6)

لاحظ أن:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} z'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} \\ z''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$w(x) = q a_0 + [p + q x] a_1 + [x^2 q + 2 p x + 2] a_2 + \dots$$

أي أن:

$$w(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_n g_n(x)$$

حيث:  $g_i(x)$  تعتمد على الدوال  $p, q$ .



نلاحظ هنا أن الجمع  $\Sigma$  غير محدد وكلما زاد عدد قيم  $x$  كان التقريب أفضل. فإذا فرضنا أن النقط هي:

$$x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{8}$$

$$\Sigma g_1^2(x) = 2.6911431$$

$$\Sigma g_0(x) g_1(x) = -3.13185$$

$$a_1 = 1.16376$$

$$a_2 = -.335588$$

$$z(x) = 1.16376x - .335588 x^2$$

فإن:

أي أن:

وبالتالي فإن:

إذن الحل التقريبي هو:

ملاحظات:

(1) بما أن الحل الصحيح للمسألة في المثال السابق هو:

$$y = \sin(x)$$

فبالإمكان أن نقارن بين الحل التقريبي  $z(x)$  وهذا الحل كما في جدول (6.1). لاحظ أن الخطأ في حدود 5 بالمائة، وأن هذا الخطأ يمكن تقليصه بأخذ درجة أعلى لمتعددة الحدود  $z(x)$ .

x	z(x)	sin(x)	الخطأ
0	0	0	0
$\pi/8$	.40524	.3816	-.02
$\pi/4$	.70701	.7071	0
$3\pi/8$	.90523	.9238	.02
$\pi/2$	1	1	0

جدول (6.1)

مثال (6.1):

أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية:

$$z(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

لتقريب حل المسألة الحدية:

$$y'' + y = 0, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$z(0) = 0$$

بما أن  $z(x)$  يجب أن تحقق الشرطين الحدين، فإن:

$$a_0 = 0$$

ويستج من ذلك أن:

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

أيضاً:

$$\frac{\pi}{2} a_1 + \frac{\pi^2}{4} a_2 = 1$$

ويعني ذلك أن:

$$a_2 = \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} a_1$$

أي أن:

$$z'(x) = a_1 + 2a_2 x$$

لتقريب الحل، نوجد:

$$z''(x) = 2a_2$$

$$w(x) = z'' + z = a_0 + a_1 x + [2 + x^2] a_2$$

إذن:

$$g_0(x) = \frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} x^2$$

أي أن:

$$g_1(x) = -\frac{4}{\pi} + x - \frac{2}{\pi} x^2$$

حيث:

لكي يكون  $w(x)$  أقرب ما يكون من الصفر (الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية) فإن طريقة المربعات الصغرى تؤدي إلى:

$$\Sigma g_0(x) g_1(x) + a_1 \Sigma g_1(x)^2 = 0$$

$$(g_0, g_1) = -1.8311022$$

$$\|g_1\|^2 = \int_0^{\pi/2} g_1^2(x) dx = 1.62847$$

$$a_1 = 1.124428$$

$$a_2 = -0.3105483$$

$$z(x) = 1.124428x - 0.3105483x^2$$

للمقارنة بين هذا الحل التقريبي والحل الصحيح، نكوّن الجدول التالي (6.2):

الخطأ	$\sin(x)$	$z(x)$	$x$
-0.012	.3816	.39367	$\pi/8$
0.015	.7071	.69156	$\pi/4$
0.03	.9238	.89367	$3\pi/8$

لاحظ أيضاً أن الخطأ يمكن تقليصه بأخذ درجة أعلى لمتعددة الحدود  $z(x)$ .

### 10.7 تقريب الدوال باستعمال طريقة المربعات الصغرى

لتقريب دالة  $f(x)$  في الفترة  $[a, b]$  بمتعددة حدود  $p(x)$  بطريقة المربعات الصغرى، يتطلب أن يكون المعيار:

$$\|f(x) - p(x)\|_2$$

أقل ما يمكن. أي أن من التعريف (6.9)،

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 dx = 0$$

حيث  $a_1$  هي معاملات متعددة الحدود.

(2) لو تم أخذ نقطة واحدة فقط لقيم  $x_i$  وهي نقطة المنتصف (أي  $x_1 = \pi/4$  في المثال السابق) فإن طريقة المربعات الصغرى تؤول إلى طريقة الاستكمال (أي طريقة الفروق المنتهية مع  $h = \pi/4$ ).

(3) بالإمكان تحسين التقريب باستعمال الجداء الداخلي المستمر بدلاً من الجداء الداخلي المنقطع. إذا كانت الدالتان  $f(x)$  و  $g(x)$  معرفتين في الفترة  $[a, b]$  فإن جداءهما الداخلي المستمر هو:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (6.8)$$

وهذا التعريف يؤدي إلى تعريف معيار للدالة (norm) وهو  $\|f\|_2$  حيث:

$$\|f\|_2^2 = (f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \quad (6.9)$$

كما نصف الدالتين  $f$  و  $g$  بأنهما متعامدتان إذا كان جداءهما الداخلي صفراً.

**مثال (6.2):**  
أعد الحل في مثال (6.2) باستعمال الجداء الداخلي المستمر بدلاً من الجداء المنقطع.

تبقى الشروط الحدية للدالة  $z(x)$  كما هي ولكن المطلوب الآن هو تقليل الخطأ التالي:

$$e = \|w\|^2 = \int_0^{\pi/2} [g_0(x) + a_1 g_1(x)]^2 dx$$

حيث  $g_0(x)$  و  $g_1(x)$  كما في المثال (6.1). بوضع:

$$\frac{\partial e}{\partial a_1} = 2 \int_0^{\pi/2} [g_0(x) + a_1 g_1(x)] g_1(x) dx = 0$$

$$a_1 = -(g_0, g_1) / \|g_1\|^2$$

فإن:

وذلك:

أ - باستعمال الجداء الداخلي المتفرق عند النقطة:

$$x = 1.25, 1.5, 1.75$$

ب - باستعمال الجداء الداخلي المستمر.

3 - استعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة في إيجاد حل تقريبي للمسألة الحدية:

$$y'' + y = 0, y(0) = 0, y(1) = 1$$

أ - باستعمال الجداء الداخلي المتفرق عند النقطة

$$x = 0.25, .5, .75$$

ب - باستعمال الجداء الداخلي المستمر.

4 - أوجد خط المربعات الصغرى لتقريب الدالة  $\sin(x)$  في الفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

5 - أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية لتقريب الدالة  $\sqrt{x}$  في الفترة  $[0, 1]$  بطريقة المربعات الصغرى.

مثال (7.1):

أوجد خط المربعات الصغرى  $p(x)$  لتقريب الدالة:  $f(x) = \sqrt{x}$  في الفترة  $[0, 1]$ .

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \int_0^1 [\sqrt{x} - a_0 - a_1 x]^2 dx = 0 \quad \text{من الشرط:}$$

$$a_0 + \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{نحصل على المعادلة:}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^1 [\sqrt{x} - a_0 - a_1 x]^2 dx = 0 \quad \text{ومن الشرط:}$$

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3} = \frac{2}{5} \quad \text{نحصل على المعادلة:}$$

$$a_0 = \frac{4}{15}, a_1 = \frac{4}{5} \quad \text{ويحل المعادلتين:}$$

$$p(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5} x \quad \text{أي أن:}$$

### تمارين (3)

1 - أثبت أن الدالتين:

$$f(x) = \sin(2\pi x)$$

$$g(x) = \cos(2\pi x)$$

متعامدتان في الفترة  $[0, 1]$ .

2 - استعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد متعددة الحدود من الدرجة

الثانية كحل تقريبي للمسألة الحدية:

$$y'' - (2/x^2)y = 0, y(1) = 1, y(2) = 4$$



س (5) : أوجد علاقة خطية بين الضغط P ودرجة الحرارة T من البيانات التالية :

T	270	280	290
P	100	105	113

استعمل تحويلاً مناسباً وأوجد العلاقة على الصورة

$$P = a_0 + a_1 T$$

س (6) : لتمثيل البيانات  $(x_i, y_i)$  على الصورة :

$$p(x) = a_0 + a_1 (x - \bar{x}) + a_2 (x - \bar{x})^2$$

حيث  $\bar{x}$  هو متوسط قيم  $x_i$ ، أوجد  $a_1$  بدلالة النقط  $(x_i, y_i)$ .

نموذج اختبار (2)

الجزء الثاني (الفصول 8, 9, 10)

الزمن 1:30 (ساعة ونصف)

س (1) : أوجد  $y(0.5)$  تقريبياً من المسألة الحدية:

$$y'' + xy = 1, y(0) = 0, y(1) = 2$$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية ( $h = 0.5$ ).

س (2) : أوجد قيمة تقريبية  $\lambda$  بحيث يكون للمسألة الحدية:

$$y'' + \lambda xy = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$$

حل غير صفري، وذلك باستعمال طريقة الفروق المنتهية مع أخذ  $h = 0.5$ .

س (3) : لحل المسألة الحدية:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, y(1) = 2$$

بطريقة التصويب أعطت المحاولة  $y'(0) = 1$  النتيجة  $y(1) = 3$ .  
ثم أعطت المحاولة الثانية  $y'(0) = 2$  النتيجة  $y(1) = 5$ . ما هي قيمة  $y'(0)$  في المحاولة الثالثة بطريقة القاطع؟

س (4) : إذا كان  $U_0$  هو المتجه الابتدائي، وكان  $U_{i+1} = AU_i$  فإن متوسط

نسب عناصر المتجه  $U_{i+1}$  إلى عناصر المتجه  $U_i$  تزول إلى أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A عندما تسمى  $i$  إلى ما لا نهاية.

اكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة مستعملاً حداً أقصى من الدورات MAX ورقم اختبار التقارب EPS.

## حل المعادلات التفاضلية الجزئية Solution of Partial Differential Equations

### 11.1 مقدمة

كمثال لمعادلة تفاضلية جزئية، ندرس المعادلة:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

حيث  $u$  دالة تعتمد على متغيرين هما  $x$  و  $t$ . تعتبر هذه المعادلة من المرتبة الثانية حيث إن مرتبة أعلى مشتقة في المعادلة هي المرتبة الثانية. في هذا الفصل، ستقوم بدراسة المعادلات الجزئية من المرتبة الثانية على الصورة:

$$(1.2) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0$$

حيث  $a, b, c, d, e, f, g$  إما مقادير ثابتة أو دوال في المتغيرين  $x$  و  $y$ . لاحظ أنه إذا كانت:

$$a = k, b = c = d = f = g = 0, e = -1$$

فإن (1.2) تصبح مكافئة للمعادلة (1.1).

## تمارين (1)

1- بين ما إذا كانت الدالة :  $u(t, x) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$

تحقق المعادلة :  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

والشرط الابتدائي :  $u(0, x) = \sin(\pi x)$

والشرطين الحديين :  $u(t, 0) = 0$

$u(t, 1) = 0$

2- صنف كلاً من المعادلات التالية من حيث كونها مكافئة أو ناقصة أو زائدة :

(أ)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$

(ب)  $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0$

(ج)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5z$

3- بين المناطق في المستوى  $x-y$  التي تكون فيها المعادلة :

$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

مكافئة أو زائدة أو ناقصة .

## 11.2 معادلة الانتشار Diffusion Equation

لحل معادلة الانتشار  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  نحتاج إلى الشرط الابتدائي :  $u(0, x) = f(x)$

تصنف المعادلة (1.2) بأنها مكافئة (parabolic) عندما :

$$b^2 - 4ac = 0$$

(1.3)

ونقول بأنها ناقصة (elliptic) عندما :

$$b^2 - 4ac < 0$$

(1.4)

وأنها معادلة زائدة (hyperbolic) عندما :

$$b^2 - 4ac > 0$$

(1.5)

$$b^2 - 4ac = 0$$

وبالتالي فإن (1.1) معادلة مكافئة حيث إن :

أما المعادلة :

(1.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(1) < 0$$

فهي معادلة ناقصة حيث إن :

أما المعادلة :

(1.7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$b^2 - 4ac = -4(1)(-1) > 0$$

فهي معادلة زائدة حيث إن :

تسمى (1.1) بمعادلة الانتشار (Diffusion Equation).

وتسمى (1.6) بمعادلة بواسون (Poisson Equation).

وتسمى (1.7) بمعادلة الموجة (Wave Equation).

وهي من أهم المعادلات التفاضلية الجزئية وستعرض لحلها الملمدي بناء على شروط ابتدائية وحدية معينة .

لاحظ أن  $u$  معلومة عند النقاط الواقعة على الحدود والمطلوب قيمتها عند النقاط الداخلية. لاحظ في هذا الشكل أيضاً أن:

$$N = 4, M = 3$$

لإيجاد الحل العددي يمكننا أن نستعمل التقريب بالفرق المركزي:

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta x^2}$$

وبالفرق المتقدم:

$$(2.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta t}$$

وبالتالي فإن (1.1) تصبح:

$$(2.6) \quad \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta t} \approx k \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta x^2}$$

أو:

$$(2.7) \quad u_{(i+1)j} = r(u_{ij-1} + u_{ij+1}) + (1 - 2r)u_{ij}$$

حيث:

$$r = k\Delta t / \Delta x^2$$

(2.8)

لاحظ أن الصيغة (2.7) تم اشتقاقها باستعمال الفرق المتقدم للمشقة الأولى  $\frac{\partial u}{\partial t}$  وبالتالي فإن الطريقة مكافئة لطريقة أويلر، وعليه نطلق على (2.7) هذا الاسم.

والشرطين الحدين عند  $x = a$  و  $x = b$

$$(2.2) \quad u(t, a) = g_a(t)$$

$$(2.3) \quad u(t, b) = g_b(t)$$

أي أن المسألة ابتدائية وحدية في نفس الوقت. دع:

$$a = 0$$

$$u_{ij} = u(i\Delta t, j\Delta x)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$\Delta t = T/M$$

حيث:

$T$  هي آخر قيمة للمتغير  $t$ . وبالتالي فإن الحل العددي هو حساب  $u$  عند  $(i\Delta t, j\Delta x)$  من القيم الابتدائية:

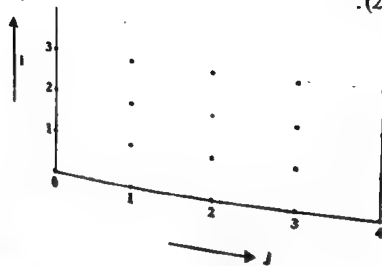
$$u_{01}, u_{02}, u_{03}, \dots, u_{0n-1}$$

$$u_{00}, u_{10}, u_{20}, \dots, u_{M0}$$

$$u_{0N}, u_{1N}, u_{2N}, \dots, u_{MN}$$

والقيم الحدية:

كما في الشكل (2.1).



شكل (2.1)

وإذا استمررنا في هذه العملية، نحصل على الجدول التالي:

t = .03	0	65	88	65	0
t = .02	0	73	95	73	0
t = .01	0	84	100	84	0
t = 0	0	100	100	100	0
	x = 0	x = .25	x = .5	x = .75	x = 1

جدول (2.1)

ملاحظة:

(1) بالإمكان إثبات أن طريقة أولر (2.7) ذات استقرار مشروط، وشرط الاستقرار هو:

$$r = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

(2.9)

إذا تحققت هذه المتباينة (وذلك باختيار  $\Delta x$  و  $\Delta t$  مناسبة) فإن أي خطأ في القيم الابتدائية يؤول تأثيره إلى الصفر عندما يؤول المتغير  $t$  إلى ما لا نهاية. وهذا يؤدي إلى أن  $u_{ij}$  تؤول نفسها إلى الصفر عندما تؤول  $i$  إلى ما لا نهاية إذا كانت القيم الحدية أصفارة.

(2) بالإمكان كتابة (2.7) كما يلي (بافتراض القيم الحدية أصفارة).

$$U_{i+1} = (1 + rA) U_i$$

(2.10)

حيث  $A$  مصفوفة الثلاثة أقطار ذات  $N-1$  صف وعمود.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad U_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \dots \\ u_{iN-1} \end{bmatrix}$$

و  $A$  مصفوفة الوحدة.

(2.11)

مثال (2.1):

قضييب طوله 1 متر في درجة حرارة 100 مئوية وضعت نهايته في درجة حرارة صفر. أوجد درجة الحرارة عند أبعاد 0.25 و 0.5 و 0.75 من الطرف بعد مرور 0.01 و 0.02 و 0.03 ساعة، علماً بأن درجة الحرارة  $u$  توصف بمعادلة الانتشار، وأن معامل الانتشار  $k$  يساوي 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نلاحظ هنا أن:

$$\Delta t = .01$$

$$\Delta x = .25$$

$$r = \Delta t / \Delta x^2 = 0.16$$

$$1 - 2r = 0.68$$

$$u_{i+1,j} = 0.16u_{i,j-1} + .68u_{i,j} + 0.16u_{i,j+1}$$

وبالتالي فإن:

ونلاحظ أيضاً أن الحالة الابتدائية والحدية يمكن أن توضع على النحو التالي:

t = .03	0				0
t = .02	0				0
t = .01	0				0
t = 0	0	100	100	100	0
	x = 0	x = .25	x = .5	x = .75	x = 1

لحساب  $u_{11}$  (أي  $x = .25$  و  $t = .01$ )

$$u_{11} = .16(0) + .68(100) + .16(100) = 84$$

ولحساب  $u_{12}$  (أي عند  $x = .5$  و  $t = .01$ ) نستخدم:

$$u_{12} = .16(100) + .68(100) + .16(100) = 100$$

لتوفير التخزين في ذاكرة الحاسب الآلي الرئيسية لا نستعمل  $u(I,J)$  كرمز للمتغير  $u_i$  حيث إن هذه العملية في هذا المثال تتطلب الأبعاد  $(500 \times 11)$  ولكن نستعمل متجهين فقط هما:

$U(J), UNEW(J) \quad J = 1, 2, \dots, 11$

ذلك لأن حساب  $U$  عند زمن  $I$  يتطلب فقط معرفة  $U$  عند  $I - 1$ .

```
DIMENSION U(11), UNEW(11)
PI = 3.14159
F(X) = SIN (PI * X/2)
GA(X) = 0
GB(X) = EXP (-PI * PI * X)
DT = 0.001
DX = 0.1
R = DT/(DX * DX)
N = 10
N1 = N + 1
M = 500
```

```
C DO 10 J = 2, N
  X = (J - 1) * DX
10 U(J) = F(X)
```

```
C T = 0
  U(1) = GA(T)
  U(N1) = GB(T)
  WRITE (*, 15) T, (U(J), J = 1, N1)
15 FORMAT (' T = ', F6.3, 11F10.5)
```

```
C DO 100 I = 1, M
  T = I * DT
  DO 25 J = 2, N
25 UNEW(J) = R * (U(J - 1) + U(J + 1)) + (1 - 2 * R) * U(J)
  UNEW(1) = GA(T)
  UNEW(N1) = GB(T)
  DO 30 J = 1, N1
30 U(J) = UNEW(J)
  WRITE (*, 15) T, (U(J), J = 1, N1)
100 CONTINUE
  STOP
  END
```

من (2.10) يتضح أن:

$$U_n = (I + rA)^n U_0$$

(2.12)

لكي يؤول  $U_n$  إلى المتجه الصفري يجب أن تكون القيم الذاتية للمصفوفة:

$$B = I + rA$$

(2.13)

أقل من الواحد (لماذا؟). وهذا يعني أن لجميع  $\lambda_i$ :

$$|1 + r\lambda_i| < 1$$

(2.14)

حيث  $\lambda_i$  هي القيم الذاتية للمصفوفة  $A$ . بتطبيق نظرية جرشجورن على المصفوفة  $A$  نلاحظ أن:

$$|\lambda_i + 2| \leq 2$$

(2.15)

من (2.14) و (2.15) يمكن استنتاج (2.9).

مثال (2.2):

أكتب برنامجاً لحساب  $u$  عند:

$$t = .001, .002, .003, \dots, .5$$

$$x = .1, .2, \dots, 0.9$$

حيث  $u$  تحقق:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, x) = \sin(\pi x/2)$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, 1) = e^{-\pi^2 t}$$

$$T = 0.5$$

$$M = 0.5 / .001 = 500$$

نلاحظ هنا أن آخر قيمة للمتغير  $t$  هي:

وهذا يعني أن

$$U_{i+1} = (I - \tau A)^{-1} U_i$$

قم باشتقاق الصيغة:

حيث  $U_i$  و  $A$  كما هما في (2.11)، وذلك لحل معادلة الانتشار بقيم حدية صفرية.

5- بين أن صيغة الفرق المتأخر في تمرين (4) ذات استقرار غير مشروط.

6- حل معادلة الانتشار بمعامل انتشار  $k=1$  و شرط ابتدائي:

$$u(0, x) = 100 \sin(\pi x)$$

$$\Delta t = \frac{1}{4} \quad \Delta x = \frac{1}{4}$$

وشروط حدية صفرية و:

وذلك عند  $t = 1$

(أ) باستعمال طريقة أولر.

(ب) باستعمال طريقة الفرق المتأخر المبينة في تمرين (4) قارن بين الحلين مع التعليق.

(ج) أكتب برنامجاً لحساب  $u$  عند  $t = 5$  بطريقة أولر مستعملاً  $\Delta t = .01, \Delta x = .2$ .

(د) أكتب برنامجاً لحساب  $u$  عند  $t = 5$  مستعملاً طريقة الفرق المتأخر والقيم  $\Delta x = .2$  و  $\Delta t = .1$ . (افتراض وجود برنامج فرعي للمعكوس).

### 11.3 معادلة بواسون Poisson Equation

تسمى المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.1)$$

بمعادلة بواسون وهي معادلة من النوع الناقص (Elliptic) ويمكن حلها إذا علمت قيم  $u$  عند حدود منطقة  $G$  في المستوى  $x - y$ ، أي:

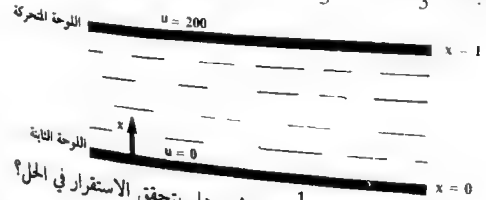
لاحظ أن قيمة  $R$  في هذا البرنامج هي:

$$R = .001 / (.1)^2 = .1 < 0.5$$

وبالتالي فإن النتائج تكون مستقرة. أما لو لم يتحقق هذا الشرط فإن قيم  $u$  ستزداد بمعدل سريع وينتج خطأ في البرنامج بسبب تعدي الأرقام الحد المسموح به في الجهاز

### تمارين (1)

1- في الشكل المرفق سائل بين لوحين، ومن السكون تم تحريك اللوحة العليا بسرعة 200 وبقيت اللوحة السفلى ساكنة، فإذا كانت سرعة السائل  $u$  تحقق معادلة الانتشار بمعامل الانتشار  $k = 0.1$ ، فاحسب سرعة السائل عند بعد  $x = \frac{1}{3}$  و  $x = \frac{2}{3}$  بعد فترة زمنية  $\frac{1}{9}$  و  $\frac{2}{9}$  و  $\frac{3}{9}$ .



استعمل  $\Delta x = \frac{1}{3}$  و  $\Delta t = \frac{1}{9}$ . هل يتحقق الاستقرار في الحل؟

2- وضح أن الصيغة (2.7) تكافئ الصيغة (2.10) وأن (2.12) هو الحل.

3- استنتج بشيء من التفصيل أن:

تحقق استقرار الحل العددي لمعادلة الانتشار بطريقة أولر، أنظر (2.13) و (2.14) و (2.15).

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t}$$

4- باستعمال التقريب بالفرق المتأخر:

حيث:

$$x_i = x_0 + i \Delta x$$

$$y_j = y_0 + j \Delta y$$

نحصل على:

$$\Delta y^2 (u_{i+1j} + u_{i-1j}) + \Delta x^2 (u_{ij+1} + u_{ij-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) u_{ij} \approx \Delta x^2 \Delta y^2 f_{ij}$$

وبأخذ

$$r = \Delta x / \Delta y$$

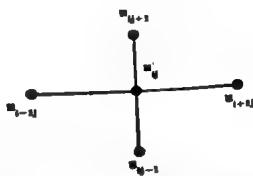
نحصل على:

$$u_{ij} = \frac{1}{2(1+r^2)} [u_{i+1j} + u_{i-1j} + r^2 (u_{ij+1} + u_{ij-1}) - \Delta x^2 f_{ij}]$$

وفي الحالة الخاصة  $\Delta x = \Delta y = h$  فإن (3.8) تصبح:

$$u_{ij} = \frac{1}{4} [u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - h^2 f_{ij}]$$

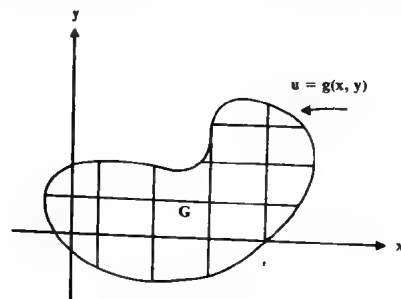
وهي (في حالة  $f_{ij} = 0$ ) تعني أن  $u$  تساوي متوسط قيم  $u$  في الأربع نقاط المجاورة كما يلي:



نحذر الإشارة هنا إلى أن (3.9) هو نظام خطي في المجهول  $u$  وإن هذا النظام يكاد يكون سائداً قطعياً عما يجعله مهيئاً لاستعمال طريقة جاكوبس - سيفل، كما نعرض المثال التالي:

$$u(x, y) = g(x, y)$$

(3.2) لجميع قيم  $(x, y)$  الواقعة على حدود  $G$ ، كما في الشكل (3.1).



شكل (3.1)

من الناحية التطبيقية قد تصف  $u$  درجة الحرارة في الحالة الثابتة (أي لا تعتمد على الزمن). لاحظ أن المعادلة (3.1) تتحقق عند النقاط الداخلية في المنطقة  $G$  وأن الدالة  $g(x, y)$  من المعطيات.

لحل (3.1) مع الشرط الحدي (3.2) نقسم المنطقة  $G$  إلى مربعات أو مستطيلات صغيرة ذات أبعاد  $\Delta x$  و  $\Delta y$ ، ونستعمل التقريب:

$$(3.3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)]$$

$$(3.4) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2} [u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)]$$

(3.5)

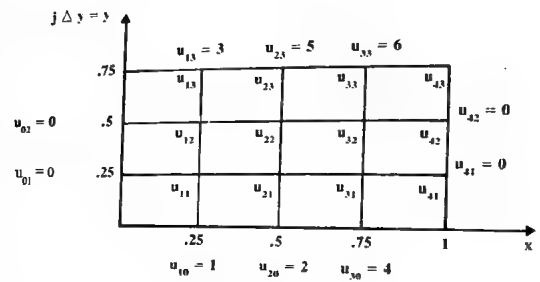
وباستعمال الاصطلاح:

$$u_{ij} = u(x_i, y_j), \quad f_{ij} = f(x_i, y_j)$$



### مثال (3.1):

أوجد قيم  $u(x, y)$  عند النقاط الداخلية المبينة في الشكل الآتي:



علماً بأن  $u$  تحقق معادلة لابلاس (Laplace) التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وأن  $u$  معلومة عند نقط الحدود كما هو مبين بالشكل. استعمل طريقة جاكوس سيدل لحل (3.9) بحساب 3 دورات فقط.

$$u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, u_{22}, u_{32}$$

نلاحظ هنا أن المجاميل هي:

$$u_{ij} = u(i\Delta x, j\Delta y)$$

حيث:

$$h = \Delta x = \Delta y = 0.25$$

و:

بوضع  $i = 1$  و  $j = 1$  في (3.9) نجد أن:

$$u_{11} = \frac{1}{4} [u_{21} + u_{01} + u_{12} + u_{10}]$$

مع ملاحظة أن  $f(x, y) = 0$  في هذا المثال. ولكن من المعطيات فإن:  $u_{01} = 0, u_{10} = 1$

أي:

$$(1) \quad u_{11} = \frac{1}{4} [u_{21} + u_{12} + 1]$$

ويأخذ  $i = 2$  و  $j = 1$  فإن:

$$u_{21} = \frac{1}{4} [u_{31} + u_{11} + u_{22} + u_{20}]$$

وحيث (من المعطيات في هذا المثال) أن  $u_{20} = 2$

$$(2) \quad u_{21} = \frac{1}{4} [u_{31} + u_{11} + u_{22} + 2] \quad \text{فإن}$$

ويأخذ  $i = 3$  و  $j = 1$  فإن:

$$u_{31} = \frac{1}{4} [u_{41} + u_{21} + u_{32} + u_{30}]$$

$$u_{31} = \frac{1}{4} [u_{21} + u_{32} + 4]$$

(3)

ونفس الطريقة فإن:

$$u_{12} = \frac{1}{4} [u_{22} + u_{02} + u_{13} + u_{11}]$$

(4)

$$u_{12} = \frac{1}{4} [u_{22} + u_{13} + u_{11} + 3]$$

(5)

$$u_{22} = \frac{1}{4} [u_{32} + u_{12} + u_{23} + u_{21}] = \frac{1}{4} [u_{32} + u_{12} + u_{21} + 5]$$

$$u_{32} = \frac{1}{4} [u_{42} + u_{22} + u_{33} + u_{31}]$$

$$u_{32} = \frac{1}{4} [u_{22} + u_{31} + 6]$$

(6)

وبذلك يكون لدينا ست معادلات نستعمل لحلها طريقة جاكوس - سيدل. نبدأ أولاً بالقيم الابتدائية ولنكن:

$$u_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2$$

نفضل أن نبدأ بقيمة ثابتة تساوي تقريباً متوسط القيم الحدية.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن هذا النظام الخطي سائد قطرياً وبالتالي فإن تقارب طريقة جاكوبس - سيدل أو طريقة جاكوبي مضمون في هذه الحالة.

مثال (3.2):

أكتب برنامجاً لحساب  $u_{ij}$  من معادلة بواسون مع قراءة ما يلي:  
1- الشروط الحدية على مستطيل في حدوده الأربعة بما في ذلك عدد التقسيمات في الاتجاه الأفقي  $N$  وعددها في الاتجاه العمودي  $M$  وطول المستطيل في الاتجاه الأفقي  $A$  وعرضه في الاتجاه العمودي  $B$ .  
2- قيمة  $\epsilon$  لتحقيق الحالة (3.1) والعدد الأقصى للدورات وليكن  $MAX$ .  
مع تحديد الدالة  $f(x, y)$  في برنامج فرعي منفصل. استعمل طريقة جاكوبس - سيدل في حل النظام الخطي (3.8).

```
DIMENSION U (20, 20), UN (20, 20)
WRITE (*, *) 'ENTER VALUES OF A, B -->'
READ (*, *) A, B
WRITE (*, *) 'ENTER VALUES OF N, M -->'
READ (*, *) N, M
WRITE (*, *) 'LEFT BOUNDARY CONDITIONS -->'
READ (*, *) (UN (I, J), J = 2, M)
WRITE (*, *) 'RIGHT BOUNDARY CONDITIONS -->'
READ (*, *) (UN (N + 1, J), J = 2, M)
WRITE (*, *) 'BOTTOM BOUNDARY CONDITIONS -->'
READ (*, *) (UN (I, 1), I = 2, N)
WRITE (*, *) 'TOP BOUNDARY CONDITIONS -->'
READ (*, *) (UN (I, M + 1), I = 2, N)
WRITE (*, *) 'ENTER MAX, EPS -->'
READ (*, *) MAX, EPS
```

ومنها نحسب الجدول التالي:

القيم الابتدائية	الدورة الأولى	الدورة الثانية	الدورة الثالثة
$u_{11}$	0.75	0.84375	1.026367
$u_{21}$	1.1875	1.621094	1.915771
$u_{31}$	1.546875	2.007813	2.143738
$u_{12}$	1.1875	1.484376	1.663818
$u_{22}$	2.09375	2.628906	2.809692
$u_{32}$	2.410156	2.659180	2.738358

ملاحظات:

(1) للحصول على حل أكثر دقة نحتاج لعدد أكثر من الدورات. ويمكن إيقاف الدورات في حالة تحقيق:

$$\max_{i,j} |u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)}| < \epsilon \quad (3.10)$$

حيث  $k$  تعني رقم الدورة و  $\epsilon$  رقم صغير تتوقف قيمته على الدقة المطلوبة.

(2) الصورة العامة لحل النظام الخطي (3.9) بطريقة جاكوبس سيدل هي:

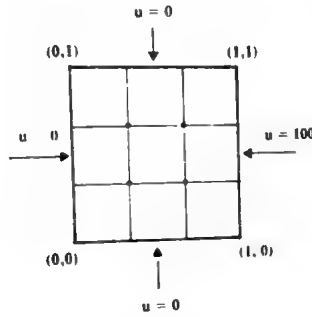
$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[ u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - h^2 f_{ij} \right] \quad (3.11)$$

حيث السدليل العلوي  $k$  يعني الدورة  $k$ . أما لاستعملنا طريقة جاكوبي لحل هذا النظام الخطي فإن قيم  $u$  في الطرف الأيمن من (3.11) تكون كلها في الدورة  $k$ .

(3) بالإمكان كتابة المعادلات من (1) إلى (6) في مثال (3.1) على النحو التالي:

## تمارين (2)

1- إذا كانت درجة الحرارة  $u$  تحقق معادلة لابلاس، وكانت ثابتة عند محيط مربع طول ضلعة متر واحد على النحو التالي:



أ- أوجد قيمة تقريبية لدرجة الحرارة عند النقاط الداخلية الأربع المبينة بالرسم، وذلك بحل معادلة لابلاس بطريقة الفروق المحدودة مستعيناً بطريقة جاوس سيدل في حل النظام الخطي الناتج (احسب 5 دورات فقط).

- ب- أعد «أ» مستبدلاً طريقة جاوس - سيدل بطريقة جاكوبي.  
 ج- أعد «أ» ولكن بحل النظام الخطي بطريقة الحذف لجاوس.  
 د- أكتب برنامجاً للقيام بالحسابات في «أ» و«ب» و«ج».
- 2- أوجد صيغة الخطأ في التقريب (3.9):

$$c_{ij} = -\frac{h^4}{48} \left[ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right]$$

حيث المشتقة الرابعة تحسب عند نقطة غير محددة.

3- (أ) أوجد قيم  $u_{ij}$  داخل المستطيل:

```

C      DX = A/N
      DY = B/M
      RSQ = (DX/DY)**2

C
C      DO 50 I = 2, N
      DO 50 J = 2, M
      UN(I, J) = 1
50      DO 55 I = 1, N + 1
      DO 55 J = 1, M + 1
55      U(I, J) = UN(I, J)
C
      DO 100 IT = 1, MAX
      DO 60 J = 2, M
      DO 60 I = 2, N
60      UN(I, J) = (UN(I - 1, J) + U(I + 1, J)
      + RSQ * (UN(I, J - 1)
      + U(I, J + 1))
      - DX**2 * F((I - 1) * DX, (J - 1) * DY))
      / (2 + 2 * RSQ)
      DO 70 I = 2, N
      DO 70 J = 2, M
70      IF (ABS(UN(I, J) - U(I, J))) .GT. EPS) GO TO 80
      CONTINUE
      GO TO 200
80      DO 90 I = 2, N
      DO 90 J = 2, M
90      U(I, J) = UN(I, J)
100     CONTINUE
100     WRITE (*, *) 'NO. OF ITERATIONS PERFORMED =', IT - 1
      WRITE (*, *)
      WRITE (*, *) 'SOLUTIONS'
      WRITE (*, *)
      DO 250 J = 1, M + 1
      K = M + 2 - J
250     WRITE (*, *) (U(I, K), I = 1, N - 1)
      STOP
      END

C
FUNCTION F(X, Y)
F = 1
RETURN
END
    
```

الطبيعة. فمثلاً إذا كان لدينا سلك كثافته  $\rho$  وتحت تأثير شد  $T$  فإن  $u(t, x)$  نصف في هذه الحالة تموجات السلك حيث:

$$(4.6) \quad c^2 = T/\rho$$

نمثل مربع سرعة انتقال الموجة. لاحظ أن  $\phi(x)$  تمثل وضعية السلك في البداية وأن  $\psi(x)$  تمثل السرعة الابتدائية في الاتجاه العمودي (أي  $x$ ).

لإيجاد تقريب للحل، نستعمل الفروق المركزية في (4.1) لنحصل على:

$$(4.7) \quad \frac{1}{\Delta t^2} (u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) - \frac{c^2}{\Delta x^2} (u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}) = f_{ij}$$

ومنها نحصل على:

$$(4.8) \quad u_{i+1j} \approx (1-r) 2u_{ij} - u_{i-1j} + r(u_{ij+1} + u_{ij-1}) + \Delta t^2 f_{ij}$$

حيث:

$$r = \Delta t^2 c^2 / \Delta x^2$$

(4.9)

وفي الحالة الخاصة ( $r = 1$ ) أي:

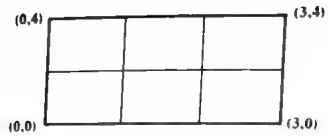
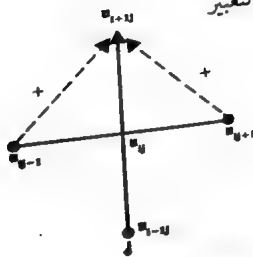
$$\Delta x = c \Delta t$$

(4.10)

فإن (4.8) تصبح:

$$u_{i+1j} \approx u_{ij+1} + u_{ij-1} - u_{i-1j} + \Delta t^2 f_{ij}$$

(4.11)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy^2 + 2x^3$$

علماً بأن:

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0$$

$$u(3, y) = y^2 \quad u(x, 4) = 16x^3$$

استعمل  $\Delta x = 1$  و  $\Delta y = 2$ .

(ب) بين أن  $u(x, y) = x^3 y^2$  تحقق الحل المطلوب وقارن بين هذا الحل والقيم التقريبية في (أ). هل يتساوى الحلان ولماذا؟

#### 11.4 معادلة الموجة Wave Equation

بالإمكان حل معادلة الموجة:

$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$$

وذلك عند توفر الشرطين الابتدائين:

$$(4.2) \quad u(0, x) = \phi(x)$$

$$(4.3) \quad -\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x)$$

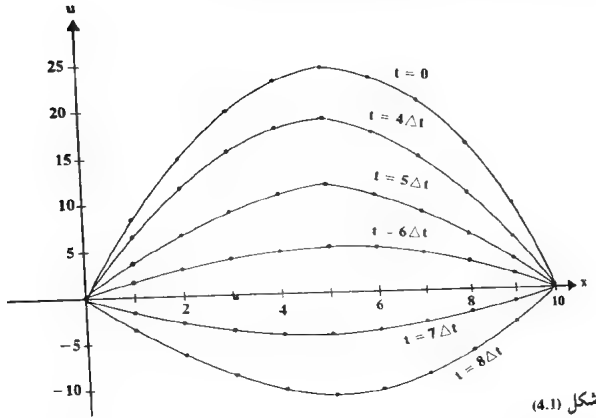
والشرطين الحديين:

$$(4.4) \quad u(t, 0) = g_0(t)$$

$$(4.5) \quad u(t, \ell) = g_\ell(t)$$

المعادلة (4.1) مع الشرطين الابتدائين والحديين تصف عدة حالات في

ويمكن تمثيل هذه النتائج بيانياً في الشكل (4.1).



شكل (4.1)

نلاحظ أن قيم  $u_{ij}$  (إذا قمنا بحساب هذه القيم عند فترات زمنية أكثر تكرر بعد زمن معين وهو ما يعرف بالذبذبة، وإذا كانت  $f = 0$  فإن الخطأ في التقريب (4.7) هو:

$$(4.12) \quad e_{ij} = \frac{1}{12} (c^2 \Delta x^2 - \Delta t^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^4} (t_i, x_j) + \dots$$

ذلك لأن:

$$(4.13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} (t_i, x_j) + \dots$$

$$(4.14) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (t_i, x_j) + \dots$$

وبما أن:

$$(4.15) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

مثال (4.1):

أوجد قيم  $u_{ij}$  بأخذ  $r = 1$  (أي  $c\Delta t = \Delta x$ )  
علماً بأن

$$f(x, y) = 0$$

$$\Delta x = 1, \ell = 10, u(0, x) = x(10 - x)$$

$$u(t, \ell) = u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} (0, x) = 0$$

نلاحظ أولاً أن لتطبيق (4.11) نلزم معرفة قيم  $u_{ij}$  وهذه يمكن الحصول عليها من التقريب:

$$\frac{\partial u}{\partial t} (0, x) \approx \frac{u(\Delta t, x) - u(0, x)}{\Delta t}$$

$$u_{ij} \approx u_{0j}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} (0, x) = 0$$

وبما أن

وبالتالي يمكننا وضع الحل في الجدول التالي (ابتداء من أسفل إلى أعلى):

7Δt	0	-3	-6	-9	-12	-13	-12	-9	-6	-3	0
6Δt	0	-1	-2	-3	-4	-5	-4	-3	-2	-1	0
5Δt	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
4Δt	0	3	6	9	12	13	12	9	6	3	0
3Δt	0	5	10	15	18	19	18	15	10	5	0
2Δt	0	7	14	19	22	23	22	19	14	7	0
t=Δt	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0
t=0	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$\begin{array}{cccccccc} t = \Delta t & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t = 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$u(t, x) = \sin(\pi x) \cos(\pi t) \quad 3- \text{بين أن الدالة:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{تحقق المعادلة الموجية:}$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \text{والشرطين الحديين:}$$

$$\text{والشرطين الابتدائيين:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$$

أكتب برنامجاً لحل هذه المسألة مستعملاً  $\Delta x = \Delta t$  بقيم مختلفة وقارن الحل العددي مع الحل المميز أعلاه.

استعمل أيضاً قيم  $\Delta x$  و  $\Delta t$  بحيث  $\Delta x < \Delta t$  ثم  $\Delta x > \Delta t$ .

فإن:

$$(4.16) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} = c^6 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \dots$$

بافتراض وجود هذه المشتقات. يتضح من (4.13) و (4.14) و (4.16) استنتاج (4.12). ومنها يتضح أيضاً أن:

$$(4.17) \quad \Delta x = c \Delta t \quad \text{عندما } e_{ij} = 0$$

نلاحظ أيضاً أن شرط الاستقرار في (4.8) هو:

$$c \Delta t / \Delta x \leq 1$$

### تمارين (3)

1 - الجدول التالي يبين قيم  $u$  عند  $t = 0$  و  $t = \Delta t$  لسلك مهترطوله 4 وحدات.

	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4
t = Δt	0	1	2	1	0
t = 0	0	1	2	1	0

يفرض  $\Delta x = c \Delta t$  أوجد  $u_{8j}$  (أي بعد فترة زمنية  $8\Delta t$ ) وبين هذه القيم بالرسم.

2 - إذا كانت سرعة انتقال الموجة  $c = 10$  (أمتار في الثانية) وتم تقسيم السلك إلى 5 فترات بحيث  $\Delta x = 2$ . فما أقصى قيمة للفترة الزمنية  $\Delta t$  حتى يتحقق استقرار الحل العددي بالفروق المركزية؟ بين إجابتك بأخذ قيم مختلفة لـ  $\Delta t$  على البيانات التالية للقيم الابتدائية:

نموذج امتحان شامل  
الجزء الثاني

(الزمن : ساعتان)

س (7) : استعمل طريقة أويلر مع أخذ  $\Delta x = \frac{1}{3}$  و  $\Delta t = \frac{1}{200}$  لحساب

$$u(0,x) = 9x^2 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(t,0) = 0$$

$$u(t,1) = 9$$

أ، احسب  $u$  عند  $x = \frac{1}{3}$  ،  $x = \frac{2}{3}$  ،  $t = \frac{1}{200}$  .

ب، هل يتحقق الاستقرار عندما نؤول  $t$  إلى  $\infty$  في الفقرة أ، ؟

س (1) : أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

س (2) : استعمل طريقة القوى (دورتين فقط) لإيجاد قيمة تقريبية ذاتية للمصفوفة في س (1) مبتدئاً بالقيمة الابتدائية للمتجه الذاتي

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

س (3) : أكتب برنامجاً لحساب  $y$  عند  $x = 2$  من المسألة الابتدائية :

$$y'' + y = \sin(x), y(0) = 0, y'(0) = 1$$

وذلك بطريقة أويلر مع  $h = 0.1$ .

س (4) : حل مسألة القيمة الحدية :

$$y'' + 3xy = 0$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

بطريقة الفروق المركزية مع أخذ  $h = \frac{1}{3}$ .

س (5) : أوجد ميل خط المربعات الصغرى للنقط  $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$

س (6) : أكتب جزءاً من برنامج لتكوين المصفوفة :

$$s = \begin{bmatrix} 10 & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{bmatrix}$$

حيث  $\sum$  تعني المجموع لقيم  $x_i$  من 1 إلى 10 والتي تتم قراءتها في البرنامج.

## ملحق (1) حلول الاختبارات

نموذج اختبار 1 (الجزء الأول)

الزمن : 1:30 (ساعة ونصف)

س 1:

أ- بين أن الفترة  $(0,1, 0.2)$  تحتوي على جذر للمعادلة  $\frac{1}{x} - 7 = 0$

الإجابة :

$$f(x) = \frac{1}{x} - 7 \quad f(1) = 10 - 7 = 3 \quad f(2) = 5 - 7 = -2$$

بما أن  $f(x)$  دالة مستمرة و  $f(1)$  قيمة سالبة، فلا بد أن يقع جذر في الفترة  $(1, 2)$ .

ب- استعمل دورتين في طريقة التنصيف لحساب جذر المعادلة في «أ» مع استعمال الفترة الابتدائية  $(0.1, 0.2)$ .

الإجابة :

$$c_0 = (1 + 2)/2 = 1.5$$



ب- استنتج العلاقة:  $c_i = \frac{a_i b_i + 7}{a_i + b_i}$

من تطبيق طريقة القاطع في حل المعادلة  $x^2 - 7 = 0$

$$c_i = a_i - f(a_i) \frac{b_i - a_i}{f(b_i) - f(a_i)} = a_i - \frac{(a_i^2 - 7)(b_i - a_i)}{b_i^2 - a_i^2}$$

$$= a_i - \frac{(a_i^2 - 7)}{b_i + a_i} = \frac{a_i b_i - a_i^2 + a_i^2 + 7}{b_i + a_i}$$

$$= (a_i b_i + 7) / (a_i + b_i)$$

ج- استخدم العلاقة في د، في كتابة برنامج لحساب وطباعة  $c_i$  من  $i = 1$  إلى  $i = 10$  مبتدئاً بالقيم  $a_1 = 2$  و  $b_1 = 3$  (لاحظ أن  $b_{i+1} = c_i, a_{i+1} = b_i$ )

```
A = 2
B = 3
DO 10 I = 1, 10
C = (A * B + 7) / (A + B)
WRITE (*, *) C
A = B
B = C
10 CONTINUE
STOP
END
```

س 3:

أ- يبين على الرسم المرفق ما إذا كانت طريقة النقطة الثابتة  $x_{i+1} = g(x_i)$  تؤدي أولاً إلى تقارب نحو أحد جذري المعادلة  $x = g(x)$  بالقيمة  $x_0$  المبينة.

$$f(c_0) = \frac{1}{.15} - 7 = 6.6 - 7 = -.4$$

$$c_1 = \frac{.1 + .15}{2} = \frac{.25}{2} = .125$$

ح- احسب الحد الأعلى للخطأ المطلق إذا كان عدد الدورات في د، خمسة.

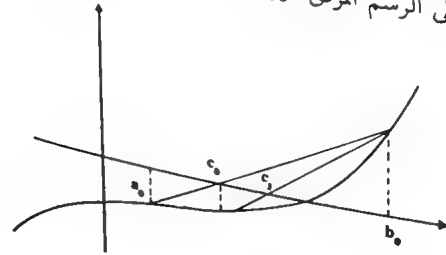
$$\text{الإجابة: } 00.3 \leq \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

د- احسب دورة واحدة في طريقة الوضع الخاطئ لحساب جذر المعادلة في «ب» مستعملاً الفترة الابتدائية (1، 2).

$$\text{الإجابة: } c_0 = a_0 - f(a_0) \frac{(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = 1 - \frac{(3)(.1)}{-5} = .1 + .06 = 1.06$$

س 2:

أ- يبين على الرسم المرفق دورتين لطريقة الوضع الخاطئ:



مودج احتار 2

الزمن : (1:30) (ساعة ونصف)

س 1:

أ- أحسب دورة واحدة بطريقة جاوس - سيدل لحل المعادلات التالية:

$$3x + y + z - 1 = 0$$

$$x - 2y - 1 = 0$$

$$2y + 3z - 2 = 0$$

افترض القيم الابتدائية  $x = y = z = 0$ .

الحل:

$$x^{(1)} = (1 - y^{(0)} - z^{(0)})/3 = 1/3$$

$$y^{(1)} = (x^{(1)} - 1)/2 = -1/3$$

$$z^{(1)} = (2 - 2y^{(1)})/3 = (2 + 2/3)/3 = 8/9$$

ب- هل يتحقق التقارب في «أ» عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟

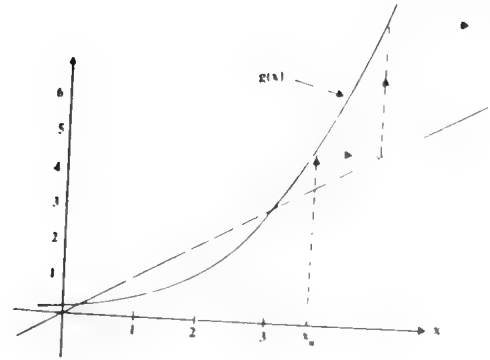
الحل:

نعم والسبب أن النظام سائد قطرياً، أي:

$$|a_{11}| = |3| > |1| + |1|$$

$$|a_{22}| = |-2| > |1|$$

$$|a_{33}| = |3| > |2|$$



يتضح من الرسم أن الطريقة لا تؤدي إلى التقارب المطلوب.

ب- استخدم طريقة نيوتن لحساب الجذر التريبي  $\sqrt[3]{5}$  مبتدئاً بالقيمة  $x_0 = 2$  وحساب دورة واحدة فقط.

$$x_1 = (x_0^2 + 5)/2x_0 = 9/4 = 2.25$$

ج- أكتب البرنامج الفرعي FUNCTION SROOT (A) الذي يحسب الجذر التريبي للعدد الموجب A. في حالة A سالبة فإنه يطبع إنذاراً بذلك ويتوقف. استعمل طريقة نيوتن مع أخذ  $x_0 = A/2$  والتوقف عندما  $|x_1^2 - A| < 10^{-6}$ .

```
FUNCTION SROOT (A)
IF (A .LT. 0) WRITE (*, *) "A IS NEGATIVE"
IF (A .LT. 0) RETURN
SROOT = A/2
10 IF (ABS (SROOT**2 - A) .LT. 1.0E-6) RETURN
SROOT = (SROOT**2 + A)/(2 * SROOT)
GO TO 10
END
```

مس 2:

أ - حل المعادلات التالية بطريقة الحذف لجاوس:

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & .4 & .8 & -.8 \\ 0 & 1.8 & 2.6 & -2.6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & .4 & .8 & -.8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = -1, x_2 = (-.8 + .8)/.4 = 0$$

$$x_1 = (3 - 2(-1) - 1(0))/5 = 1$$

ب - اكتب برنامجاً فرعياً (SUBROUTINE FDSUB (A, B, N, X)) الذي يوجد المتجه X بحل النظام  $AX = B$  حيث A مصفوفة مثلثة سفلية (أي أن جميع عناصرها التي فوق القطر أصفار).

```

SUBROUTINE FDSUB (A, B, N, X)
  DIMENSION A (N, N), B(N), X(N)
  X(1) = B(1)/ A(1, 1)
  DO 10 I = 2, N
    SUM = 0
    I1 = I - 1
    DO 20 J = 1, I1
      SUM = SUM + A (I, J) * X(J)
    X(I) = (B(I) - SUM)/ A(I, I)
  RETURN
END

```

20  
10

294

مس 3:

أ - إذا كان عدد الطلبة في سنة 1984 هو 17,000 وفي سنة 1987 هو 19400 فقدر عدد الطلبة في سنة 1988 باستعمال الاستكمال الخطي .

الحل:  $p(1988) = 17000 + \frac{19400 - 17000}{1987 - 1984} (1988 - 1984)$

$$= 17000 + \frac{2400}{3} (4) = 17000 + 3200 = 20200$$

ب - أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية التي تلتقي مع الدالة  $f(x) = \sin(x)$  عند  $x = 0$  و  $x = \frac{\pi}{2}$  و  $x = \pi$ .

x	y=sinx	$\Delta y$	$\Delta^2 y$
0	0	1	-2
$\pi/2$	1	-1	
$\pi$	0		

$$p(x) = 0 + \frac{1}{\pi/2} (x-0) - \frac{2}{2(\pi/2)^2} (x-0) (x-\pi/2)$$

$$= \frac{2}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} x (x - \frac{\pi}{2})$$

ج - اكتب برنامجاً لتقدير عدد السكان في سنة من السنوات (يتم إدخالها) بمعلومية عدد السكان في السنوات الثلاث الماضية (أيضاً يتم إدخالها) وذلك باستعمال الاستكمال الترييبي .

```

10 DIMENSION X(2), Y(2)
  DO 10 I = 1, 2
    READ (*, *) X(I), Y(I)
  READ (*, *) XP
  YP = Y(1) + (Y(2) - Y(1)) * (XP - X(1)) + (Y(3) - 2 * Y(2)
    + Y(1)) * (XP - X(1)) * (XP - X(2))/2.
  WRITE (*, *) XP, YP
  STOP
END

```

293

نموذج امتحان شامل مع الإجابة  
(الجزء الأول)

(المجموع = 40 نقطة)

مس 1:

أوجد قيمة تقريبية للجذر الموجب للمعادلة  $2x^2 - 3 = 0$ .  
ب- بطريقة التنصيف مبتدئاً بالفترة  $[1, 2]$  وحساب دورتين فقط.

(نقطتان)

الحل:

$$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad f(1.5) = 2(1.5)^2 - 3 = \frac{9}{2} - 3 = +1.5$$

$$f(a_1) = f(1) = 2 - 3 = -1, f(b_1) = f(2) = 8 - 3 = 5$$

$$c_2 = \frac{1.5+1}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25$$

ب- بطريقة الوضع الخاطئ. مبتدئاً بالفترة  $[1, 2]$  وحساب دورة واحدة.

(نقطتان)

الحل:

$$c_1 = a_1 - f(a_1) \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} = 1 - (-1) \frac{2 - 1}{5 - (-1)} = \frac{7}{6}$$

$$f(c_1) = 2(7/6)^2 - 3 = 49/18 - 3 = -5/18$$

ج- بطريقة نيوتن مع أخذ  $x_0 = 2$  وحساب دورة واحدة.

(نقطتان)

الحل:

$$x_1 = 2, f(x_1) = 5, f'(x_1) = 4x_1 = 8$$

206

$$x_1 = 2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$$

$$f(x_1) = 2(11/8)^2 - 3 = 121/32 - 3 = 25/32$$

د- أكتب برنامجاً لحساب 10 دورات بطريقة نيوتن مبتدئاً بالقيمة  $x_0 = 2$   
لحل المعادلة  $2x^2 - 3 = 0$

(نقطتان)

20  
X = 2  
DO 20 I = 1, 10  
X = X - (2 \* X \* X - 3) / (4 \* X)  
WRITE (\*, \*) X  
STOP  
END

مس 2:

أ- احسب دورة واحدة لحل المعادلات التالية بطريقة جاوس - سيدل ابتداءً من  $x = y = 0$

(نقطتان)

$$3x + y = 1$$

$$x + 2y = 2$$

$$x_1 = \frac{1-y_0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{2-x_1}{2} = \frac{2-1/3}{2} = \frac{5}{6}$$

ب- هل يتم التقارب نحو الحل في داء عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟

(نقطتان)

نعم. لأن المعادلات سالبة قطرياً.

207

مس 3:

اكتب البرنامج الفرعي:

SUBROUTINE ELEMI (A, B, N)

الذي يقوم بالتعديلات اللازمة في المصفوفة المربعة A والمتجه B وذلك للتخلص من  $x_1$  في جميع المعادلات (ما عدا المعادلة الأولى) في النظام الخطي  $AX = B$  المتكون من N معادلة. افترض أن  $a_{11} \neq 0$ .

(5 نقاط)

```
SUBROUTINE ELEMI (A, B, N)
  DIMENSION A(N, N), B(N)
  DO 10 I = 2, N
    T = - A(I, 1) / A(1, 1)
    DO 20 J = 2, N
      A(I, J) = A(I, J) + T * A(1, J)
      B(I) = B(I) + T * B(1)
    END DO
  END DO
  RETURN
END
```

مس 4:

استكمل قيمة  $f(1.6)$  في الجدول التالي باستعمال جميع القيم المتوفرة:

x	1.5	1.7	1.8
f(x)	6.9	8.1	9.6

(5 نقاط)

$$\ell_0(1.6) = \frac{(1.6 - 1.7)(1.6 - 1.8)}{(1.5 - 1.7)(1.5 - 1.8)} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\ell_1(1.6) &= \frac{(1.6 - 1.5)(1.6 - 1.8)}{(1.7 - 1.5)(1.7 - 1.8)} = \frac{(0.1)(-0.2)}{(0.2)(-0.1)} = 1 \\ \ell_2(1.6) &= \frac{(1.6 - 1.5)(1.6 - 1.7)}{(1.8 - 1.5)(1.6 - 1.7)} = \frac{(0.1)(-0.1)}{(0.3)(-0.1)} = -\frac{1}{3} \\ f(1.6) &\approx \frac{6.9}{3} + 8.1 - \frac{9.6}{3} = 2.3 + 8.1 - 3.2 = 10.4 - 3.2 \\ &= 7.2\end{aligned}$$

مس 5:

إذا كانت  $|f'''(x)|$  لا تزيد عن 2 في الفترة  $[1.5, 1.8]$  فأوجد حداً أعلى للخطأ في (مس 4).

(4 نقاط)

$$\begin{aligned}|f(x) - p(x)| &\leq \frac{|f'''(\xi)|}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\leq \frac{2}{6} |(1.6 - 1.5)(1.6 - 1.7)(1.6 - 1.8)| \\ &\leq \frac{1}{3} (0.1)(0.1)(0.2) = \frac{0.002}{3} = 0.00067\end{aligned}$$

مس 6:

أحسب قيمة تقريبية للتكامل  $\int_1^2 x^3 dx$  بطريقة سمسن وذلك باستعمال  $n=2$  (حيث  $n$  هي عدد تقسيمات فترة التكامل).

(3 نقاط)

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{0.5}{3} [1 + 4(1.5)^3 + 2^3] = 3.75$$

ب- ما هو الخطأ في التقريب المتحصل عليه في أ؟

(نقطتان)

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$

إذن الخطأ = صفراً.

س 7:

إذا كان الخطأ في تقريب تكامل بطريقة سمسن مع تقسيم فترة التكامل إلى  $n$  فترة هو 0.0032. فتقدر الخطأ إذا استعملنا  $2n$  من الفترات.

(4 نقاط)

بما أن الخطأ يتناسب مع  $h^4$  فإنه في هذه الحالة يتقلص بمقدار  $\left(\frac{1}{2}\right)^4$  أي  $\frac{1}{16}$  وبالتالي فإن الخطأ الناتج باستعمال  $2n$  من الفترات هو:

$$\frac{0.0032}{16} = 0.0002$$

س 8:

إذا كانت  $f(x) = \frac{1}{x}$  فأوجد قيمة تقريبية للتفاضل  $f'(1)$  باستعمال الفرق المركزي مع أخذ  $h = \Delta x = 0.1$

(4 نقاط)

$$f'(1) = \frac{\frac{1}{1.1} - \frac{1}{.9}}{0.1} = \frac{1}{0.2} \left( \frac{.9 - 1.1}{.99} \right) = \frac{-1}{.99} = -1.0101$$

الجزء الثاني

اختبار نموذجي (1) على الفصل السادس

الزمن:  $1 \frac{1}{2}$  ساعة ونصف

1- تعتبر طريقة أويلر ذات استقرار مشروط، أما طريقة نقطة المنتصف فهي غير مستقرة على الإطلاق بينما تعتبر طريقة شبه المنحرف مستقرة بدون شرط.

(3 نقاط)

2- استعمل طريقة أويلر المعادلة لتقدير  $y$  عند  $x = 1$  من  $y(0) = 1$  والمعادلة  $y'y = 1$ . (استخدم 4 عشرية في الحساب).

$$p_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + \frac{(-1)}{1} = 1.1$$

$$y_1 = 1 + \frac{(-1)}{2} \left[ 1 + \frac{1}{1.1} \right] = 1 + (.05) (1 + .909)$$

$$= 1 + (.05) (1.909) = 1.09545$$

(5 نقاط)

3- أكتب برنامجاً للمقارنة بين الحل الصحيح  $y = e^{-x}$  للمعادلة  $y' = -y$  و  $y(0) = 1$  والحل بطريقة أويلر وذلك عند  $x = 1$  وقيم مختلفة لمقدار الخطوة  $h$  بحيث:

$$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$$

(7 نقاط)

Y = 1  
DO 100 I = 1, 100  
H = 1.0/I  
DO 20 K = 1, I

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [y'_i + y'_{i+1}]$$

$$= y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{4} y'''_i + \dots$$

بالمقارنة مع متسلسلة تايلور فإن الخطأ في هذه الصيغة هو  $O(h^3)$

```
20  Y = Y - H * Y
    WRITE (*, *) Y, EXP (-1)
100  CONTINUE
    END
```

4 - (ب) استعمل طريقة رانج كوتا لحساب  $y_2$ ، علماً بأن:

$$y' = 4x^3 \quad x_1 = 0, y_1 = 0, h = 0.2$$

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = (.2) (4(0.1)^3) = .0008$$

$$k_3 = (.2) (4(0.1)^3) = .0008$$

$$k_4 = (.2) (4(.2)^3) = .0064$$

$$y_1 = \frac{1}{6} [4(.0008) + .0064]$$

$$= \frac{1}{6} [.0096] = .0016$$

(6 نقاط)

4 - (ب) لماذا تعطي طريقة رانج كوتا قيم  $y_i$  مساوية للحل الصحيح عند حل المعادلة  $y' = 4x^3$ ؟

(4 نقاط)

عند حل المعادلة  $y' = f(x)$  بطريقة رانج كوتا، فإن هذه الطريقة تكافئ طريقة سمسن للتكامل، والمعروف أن هذه الطريقة تعطي نتائج صحيحة عند تكامل متعددة الحدود من الدرجة الثالثة كما في السؤال.

(5 نقاط)

5 - أوجد مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة شبه المنحرف:

### نموذج اختبار «2» الجزء الثاني

الزمن: 1:30 (ساعة ونصف)

1 - أوجد قيمة تقريبية  $y(0.5)$  من المسألة الحدية

$$y'' + xy = 1, y(0) = 0, y(1) = 2$$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية ( $h = 0.5$ )

$$\frac{1}{(0.5)^2} [y(1) - 2y(0.5) + y(0)] + (0.5) y(0.5) = 1$$

الإجابة:

$$4[2 - 2y(0.5) + 0] + 0.5y(0.5) = 1$$

$$7.5y(0.5) = 7 \Rightarrow y(0.5) = 0.932$$

(4 نقاط)

2 - أوجد قيمة تقريبية  $\lambda$  بحيث يكون للمسألة الحدية

$$y'' + \lambda xy = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$$

حل غير صفري، وذلك باستعمال طريقة الفروق المنتهية مع أخذ  $h = 0.5$

$$\frac{1}{(0.5)^2} [y(1) - 2y(0.5) + y(0)] + \lambda (0.5) y(0.5) = 0$$

$$4[-2y(0.5)] + 0.5\lambda y(0.5) = 0$$

$$[-8 + \lambda/2] y(0.5) = 0$$

$$y(0.5) \neq 0 \Rightarrow [-8 + \lambda/2] = 0 \Rightarrow \lambda = 16$$

(4 نقاط)

3 - لحل المسألة الحدية:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, y(1) = 2$$

بطريقة التصويب، أعطت المحاولة 1  $y'(0) = 1$  النتيجة  $y(1) = 3$ . ثم أعطت المحاولة الثانية  $y'(0) = 2$  النتيجة  $y(1) = 5$ . ما هي قيمة  $y'(0)$  في المحاولة الثالثة بطريقة القاطع؟

$$y'(0) = \gamma = 1 + (2 - 3) / (3 - 5)$$

الإجابة:

$$= 1 - 1/2 = 0.5$$

(4 نقاط)

4 - إذا كان  $U_n$  هو المتجه الابتدائي، وكان  $U_{n+1} = AU_n$  فإن متوسط نسب عناصر المتجه  $U_{n+1}$  إلى عناصر المتجه  $U_n$  تؤول إلى أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$  عندما تسعى إلى ما لا نهاية.

أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة مستعملاً حداً أقصى من الدورات MAX و رقم اختار التقارب EPS.

```

SUBROUTINE POWER (A, N, AVE, UIN, U, MAX, EPS)
DIMENSION A (N, N), UIN (N), U (N)
OLD = 0
DO 100 IT = 1, MAX
DO 101 I = 1, N
SUM = 0
DO 20 J = 1, N
SUM = SUM + A (I, J) * UIN (J)
20 U (I) = SUM
10 SRAT = 0
DO 30 I = 1, N
SRAT = SRAT + U (I) / UIN (I)
30 AVE = SRAT / N
IF (ABS (AVE - OLD) .LT. EPS) RETURN
OLD = AVE
DO 40 I = 1, N

```



6- لتمثيل البيانات  $(x_i, y_i)$  على الصورة:

$$p(x) = a_0 + a_1 (x - \bar{x}) + a_2 (x - \bar{x})^2$$

حيث  $\bar{x}$  هو متوسط قيم  $x_i$ ، أوجد  $a_1$  بدلالة النقط  $(x_i, y_i)$ .

$$\begin{bmatrix} m & 0 & \sum g_2 \\ 0 & \sum g_1^2 & 0 \\ \sum g_2 & 0 & \sum g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y g_0 \\ \sum y g_1 \\ \sum y g_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\sum y(x - \bar{x})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$

(4 نقاط)

40 UIN(I) = U(I)  
100 CONTINUE  
RETURN  
END

(8 نقاط)

5- أوجد علاقة خطية بين الضغط P ودرجة الحرارة T من البيانات التالية:

T	270	280	290
P	100	105	113

استعمل تحويلًا مناسباً، وأوجد العلاقة على الصورة  $P = a_0 + a_1 T$

$$x = T - \bar{T} = T - 280$$

$$y = p - 100$$

$$y = b_0 + b_1 x$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 130 \end{bmatrix}$$

$$b_0 = 18/3 = 6$$

$$b_1 = 130/200 = 13/20$$

$$p - 100 = 6 + \frac{13}{20} (T - 280) = \frac{13}{20} T - 182 + 6$$

$$p = \frac{13}{20} T - 76$$

(6 نقاط)

$$V_1 = \begin{bmatrix} 7/13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{13} + 5 \\ \frac{56}{13} + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \frac{1}{13} \\ 9 \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = 9 \frac{4}{13}$$

(6 درجات)

س (3) : أكتب برنامجاً لحساب y عند x = 2 من المسألة الابتدائية :

$$y'' + y = \sin(x), y(0) = 0, y'(0) = 1$$

وذلك بطريقة أويلر مع h = 0.1

جـ (3) :

```

H = 0.1
Y = 0
U = 1
DO 100 I = 1, 20
  Y = Y + H * U
  U = U + H * (SIN(X) - Y)
  X = X + H
  WRITE (*, *) X, Y
STOP
END
100

```

(6 درجات)

س (4) : حل مسألة القيمة الحدية  $y'' + 3xy = 0$

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

بطريقة الفروق المركزية مع أخذ  $h = \frac{1}{3}$

نموذج امتحان شامل للجزء الثاني

(الزمن : ساعتان)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} : \text{ أوجد القيم الذاتية للمصفوفة : } (1) \text{ س}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 40 \quad \text{جـ (1) :}$$

$$= 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 40$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 30$$

$$= (\lambda + 3)(\lambda - 10) = 0$$

القيم الذاتية هي 10 و -3

(5 درجات)

س (2) : استعمل طريقة القوى (دورتان فقط) لإيجاد قيمة تقريبية ذاتية للمصفوفة في س (1) مبتدئاً بالقيمة الابتدائية للمتجه الذاتي :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = 13$$

جـ (2) :

ج (4) :

حيث  $\Sigma$  تعني الجمع لقيم  $x_i$  من 1 إلى 10 والتي تتم قراءتها في البرنامج :

```

DIMENSION X(10), S(3,3)
READ (*, *) (X(I), I = 1, 10)
DO 20 I = 1, 3
DO 30 J = 1, 3
S(I, J) = 0
IF (I. EQ. 1. AND. J. EQ. 1) S(I, J) = 10
IF (I + J. GT. 2) THEN
DO 40 K = 1, 10
S(I, J) = S(I, J) + X(K) ** (I + J - 2)
ENDIF
CONTINUE
CONTINUE

```

ج (6) :

س (7) : استعمل طريقة أولر مع أخذ  $\Delta x = \frac{1}{3}$  و  $\Delta t = \frac{1}{200}$  لحساب  $u$  من المعادلة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, x) = 9x^2$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, 1) = 9$$

أحسب  $u$  عند  $x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{200}$  عند  $t = \frac{1}{200}$  : (7) س :

$$r = \frac{k \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{10}{(200)(1/3)^2} = \frac{9}{20}$$

$$1 - 2r = 1 - \frac{18}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

311

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{(1/3)^2} + 3\left(\frac{1}{3}\right)y_1 = 0$$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(1/3)^2} + 3\left(\frac{2}{3}\right)y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -17 & 9 \\ 9 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -9 & -16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -17 & 9 \\ 9 & -16 \end{vmatrix}} = \frac{81}{191}, y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 0 \\ 9 & -9 \end{vmatrix}}{191} = \frac{153}{191}$$

(6 درجات)

س (5) : أوجد ميل خط المربعات الصغرى للنقط :  $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + y_1 + y_2 \\ -hy_0 + hy_2 \end{bmatrix}$$

ميل خط المربعات الصغرى  $a_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}$  (5 درجات)

س (6) : أكتب جزءاً من برنامج لتكوين المصفوفة :

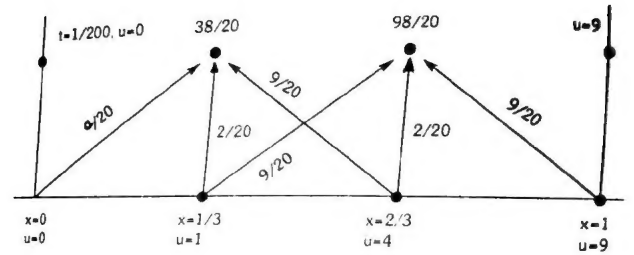
$$s = \begin{bmatrix} 10 & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix}$$

310

## ملحق (2) قائمة المصطلحات العلمية

Absolute error  
Algorithm  
Approximation  
Array  
Augmented matrix  
Back-substitution  
Backward difference  
Best approximation  
Binomial expansion  
Bisection method  
Boundary conditions  
Boundary-value problem  
Central difference  
Characteristic polynomial  
Characteristic value  
Characteristic vector  
Chopping  
Composite rule  
Condition number  
Conditionally stable method  
Consistent method  
Continuous function

الخطأ المطلق  
نظام حسابي (خوارزمية)  
تقريب  
مصفوفة مربعة  
مصفوفة مربعة  
التعويض إلى الخلف  
الفروق المتأخر (الخلفي)  
أفضل تقريب  
نشر ذات الحدين  
طريقة التصنيف  
الشروط الحدية  
مسألة القيمة الحدية  
الفروق المركزي  
متعددة حدود مميزة  
قيمة ذاتية  
متجه ذاتي  
القطع  
قاعدة مركبة  
رقم الحالة  
طريقة ذات استقرار مشروط  
طريقة متوافقة  
دالة مستمرة



$$u\left(\frac{1}{200}, \frac{1}{3}\right) = 1.9, u\left(\frac{1}{200}, \frac{2}{3}\right) = 4.9$$

(5 درجات)

(ب) هل يتحقق الاستقرار عندما  $t$  تؤول  $\infty$  إلى  $\infty$  في الفقرة (أ)؟  
لماذا؟

نعم عما أن  $\frac{9}{20} = r < \frac{1}{2}$  فإن شرط الاستقرار قد تحقق.  
(درجة واحدة)

Identity matrix  
 Ill-conditioned matrix  
 Implicit method  
 Increment  
 Infinity norm  
 Initial condition  
 Initial-value problem  
 Integration  
 Interpolation  
 Inverse of a matrix  
 Inverse Power method  
 Iteration  
 Least-squares method  
 Linear interpolation  
 Linear system  
 Local truncation error  
 Lower-triangular matrix  
 Matrix  
 Maximum norm  
 Mean-value theorem  
 Method of False position  
 Midpoint method  
 Milne's method  
 Modified Euler's method  
 Multi-step method  
 Newton's method  
 Newton's backward difference formula  
 Newton's divided difference formula  
 Newton's forward difference formula  
 Norm  
 Normal equations  
 Numerical method

315

مصفوفة الوحدة  
 مصفوفة سيئة (معتلة)  
 طريقة ضمنية  
 زيادة  
 معيار ما لا نهاية  
 شرط ابتدائي  
 مسألة القيمة الابتدائية  
 تكامل  
 استكمال  
 معكوس مصفوفة  
 طريقة قوى المعكوس  
 دورة (تحسين)  
 طريقة المربعات الصغرى  
 الاستكمال الخطي  
 نظام خطي  
 خطأ الصيغة الموضوعي  
 مصفوفة مثلثية سفلية  
 مصفوفة  
 معيار الحد الأعلى  
 مبرهنة القيمة الوسطى  
 طريقة الوضع الخاطئ  
 طريقة نقطة المنتصف  
 طريقة ملن  
 طريقة أولر المعدلة  
 طريقة الخطوات المتعددة  
 طريقة نيوتن  
 طريقة نيوتن للفروق المتأخرة  
 طريقة نيوتن للفروق المقسومة  
 معيار  
 المعادلات القياسية  
 طريقة علمية

Convergence  
 Corrector formula  
 Derivative  
 Determinant of a matrix  
 Diagonally dominant matrix  
 Diagonal matrix  
 Difference equation  
 Differential equation  
 Diffusion equation  
 Discrete data  
 Divided difference  
 Eigen value  
 Eigen vector  
 Elimination  
 Elliptic equation  
 Error  
 Euclidean norm  
 Euler's method  
 Exact solution  
 Explicit method  
 Exponent  
 Extended Euler's method  
 Extrapolation  
 Factorial  
 Finite-difference operator  
 Fixed-point method  
 Formula  
 Forward difference  
 Gauss-Jordan method  
 Gaussian elimination method  
 Global error  
 Hyperbolic equation

314

تقارب  
 صيغة تصحيح  
 مشتقة  
 محدد مصفوفة  
 مصفوفة سائدة قطرياً  
 مصفوفة قطرية  
 معادلة فروق  
 معادلة تفاضلية  
 معادلة الانتشار  
 بيانات متفرقة  
 الفرق المقسوم  
 قيمة ذاتية  
 متجه ذاتي  
 حذف  
 معادلة ناقصة  
 خطأ  
 المعيار الاقليدي  
 طريقة أولر  
 الحل الصحيح (المضبوط)  
 طريقة صريحة  
 الأس  
 طريقة أولر الموسعة  
 استكمال خارجي  
 مضروب  
 مؤثر الفروق المنتهية  
 طريقة النقطة الثابتة  
 صيغة  
 فرق متقدم  
 طريقة جاوس وجوردان  
 طريقة الحذف لجاوس  
 الخطأ الكلي  
 معادلة زائدة

## Superscript

System of equations

Symmetric matrix

Taylor's series

Test equation

Tolerance condition

Tolerance number

Trapezoidal method

Tridiagonal matrix

Triangular matrix

Trivial solution

Truncation error

Unconditionally stable method

Unstable method

Upper-triangular matrix

Vandermonde matrix

Vector

Vector norm

Wave equation

Weakly stable method

Zero of a function

دليل فوري (علوي)

نظام معادلات

مصفوفة متثلثة

متسلسلة تايلور

معادلة اختبار

شرط تسامح

رقم تسامح

طريقة شبه المنحرف

مصفوفة ذات أقطار ثلاثة

مصفوفة مثلثية

حل تافه

خطأ الصيغة

طريقة مستقرة بدون شرط

طريقة غير مستقرة

مصفوفة مثلثية علوية

مصفوفة فاندروند

متجه

مقياس المتجه

معادلة الموجة

طريقة ضعيفة الاستقرار

جذر دالة

Operator

Order

Orthogonal functions

Orthogonal vectors

Parabola

Parabolic equation

Partial differential equation

Pivot element

Pivoting

Polynomial

Power method

Predictor formula

Predictor-corrector method

Radian

Rate of convergence

Region of stability

Regula-Falsi method

Relative error

Richardson's extrapolation method

Root of an equation

Round-off error

Row

Runge-kutta method

Secant method

Series

Shooting method

Simpson's method

Single-step method

Spectral radius of a matrix

Stability

Step

Subscript

مؤثر

رتبة (مرتبة)

دوال متعامدة

متجهات متعامدة

قطع مكافئ

معادلة مكافئة

معادلة تفاضلية جزئية

عنصر الارتكاز

عملية الارتكاز

متعددة حدود (حدودية)

طريقة القوى

صيغة تنبؤ

صيغة تنبؤ وتصحيح

زاوية نصف قطرية

معدل التقارب

منطقة الاستقرار

طريقة الوضع الخاطئ

خطأ نسبي

طريقة ريتشاردسون بالاستكمال الخارجي

جذر معادلة

خطأ التقريب

صف

طريقة رانج - كوتا

طريقة القاطع

متسلسلة

طريقة التصويب

طريقة سمن

طريقة الخطوة الواحدة

نصف القطر الطيفي لمصفوفة

استقرار

خطوة

دليل سفلي

## المراجع

١- اللغة العربية

بالعلم العربي  
تحت إشراف د. محمد عبد الحليم  
مؤلفه فرانسيس شيد  
المطبعة الحديثة - القاهرة - 1981

٢٠ - اللغة الانجليزية

- 1- Curtis F. Gerald & Patrick O. Wheatly, «Applied Numerical Analysis», Addison-Wesley Publishing Co (1984).
- 2- Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Albert C. Reynolds, «Numerical Analysis», Prindle, Weber & Schmidt Publishing company, Boston, Massachusettes (1981).
- 3- Kendall E. Atkinson, «An Introduction to Numerical Analysis», John Wiley & Sons, New York (1978).
- 4- B. P. Demidovi & I. A. Maron, «Computational Mathematics», Translated from Russian by George Yankovsky, Mir Publishers, Moscow (1973).